

$H=0$ —
平均曲率为零
— 极小曲面



蜂窝结构
轻量·高强·高效

极小曲面

— 生物为什么都选同一种几何结构? —

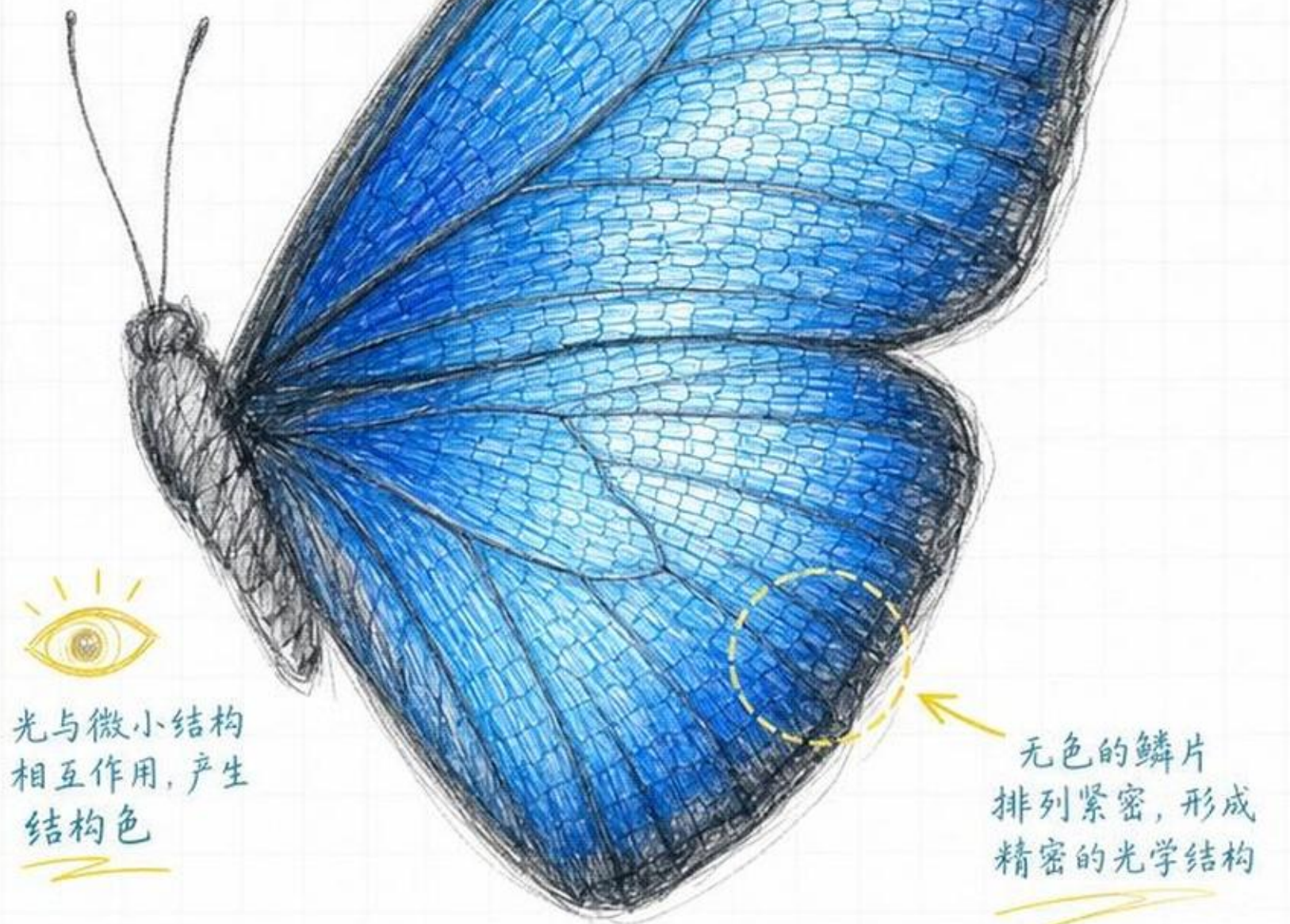
$\delta A = 0$
面积泛函
取极小值

自然选择的
几何最优解

颜色从哪里来？

宏观视角下的
绚丽金属蓝

我们看到的
是耀眼的
金属蓝色



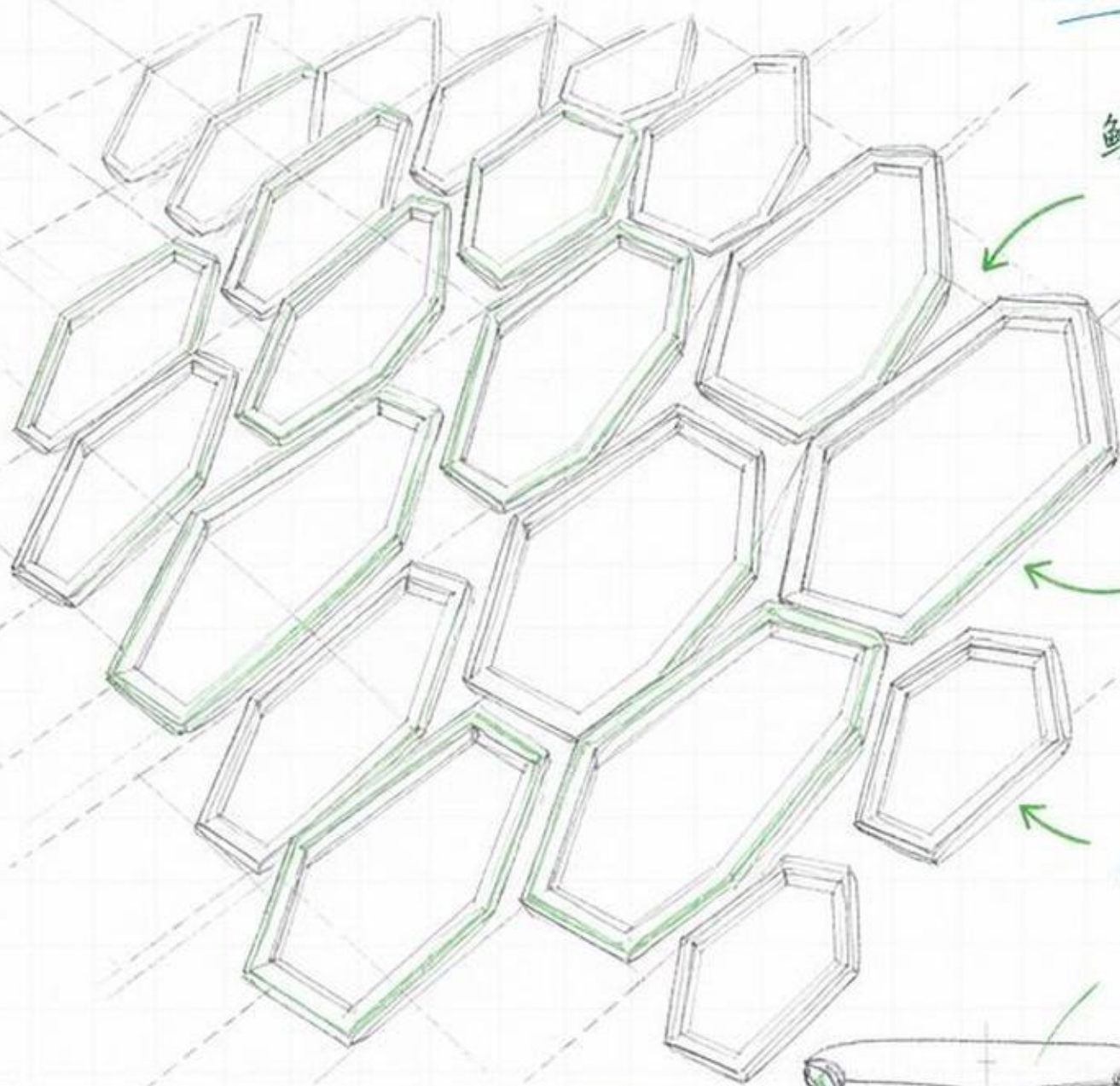
光与微小结构
相互作用，产生
结构色

无色的鳞片
排列紧密，形成
精密的光学结构

微观刮除后的透明底色



放大数千倍观察



鳞片呈扁平的
多面体结构

由几丁质构成
本身无色透明

中空纳米结构
(层状脊或薄壁)
控制光的干涉

约 200-400 nm

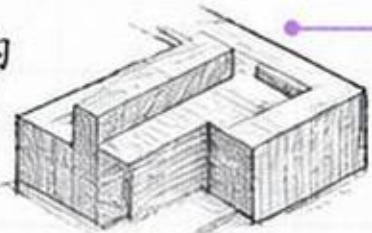
没有颜料，
颜色源于结构与光的相互作用！

纳米级三维迷宫

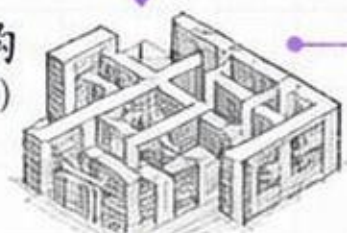
光束反复干涉与折射

结构解析：
纳米迷宫内壁

一级结构
(微米级)



二级结构
(亚微米级)



三级结构
(纳米级)



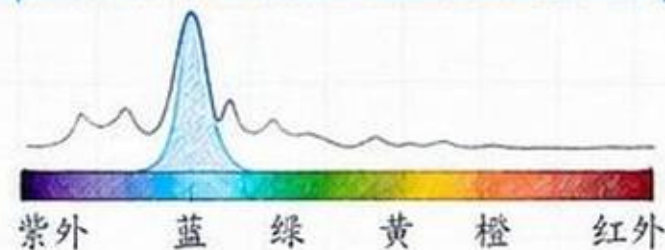
- 尺寸尺度：~100 纳米
- 材料：几丁质（低折射率）
- 功能：结构色产生

100 nm

1 μm

蓝色是被建筑出来的

只有蓝光逃逸而出



蝴蝶鳞片纳米迷宫

鳞片横截面 (纳米尺度)
复杂的光子迷宫结构

纳米级拱形通道
控制光的干涉与色彩

200 nm

眼球线粒体折叠膜

线粒体内膜
高度折叠的嵴结构

嵴的横截面轮廓
优化表面积以提高
能量转换效率

1970 年数学手稿

研究笔记:
最优曲面与最小能量结构

NASA - Langley Research Center
1970.6.12
L. Wang

$$E = \int_S (|\nabla u|^2 + \lambda) dA \rightarrow \min$$

$$\delta E = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla u) = 0 \quad (\text{Laplace})$$

最优解的局部形式:

$$y = A \cosh(kx) + B \sinh(kx) + C$$

周期性边界条件:

$$y(x+P) = y(x)$$

$$\Rightarrow k = \frac{2\pi}{P} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$y = A \cosh\left(\frac{2\pi}{P} nx\right) + B \sinh\left(\frac{2\pi}{P} nx\right) + C$$

最优几何 =
自然选择的形状

自然界的复杂结构
往往源于简单的
数学原理。

— L. Wang

同一种数学结构

共享数学轮廓

结构细节

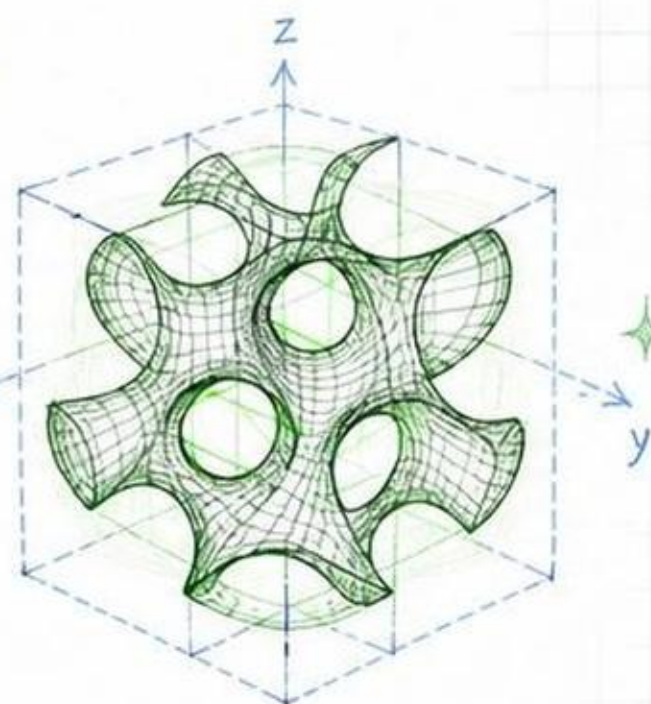
关键洞见

王利杰

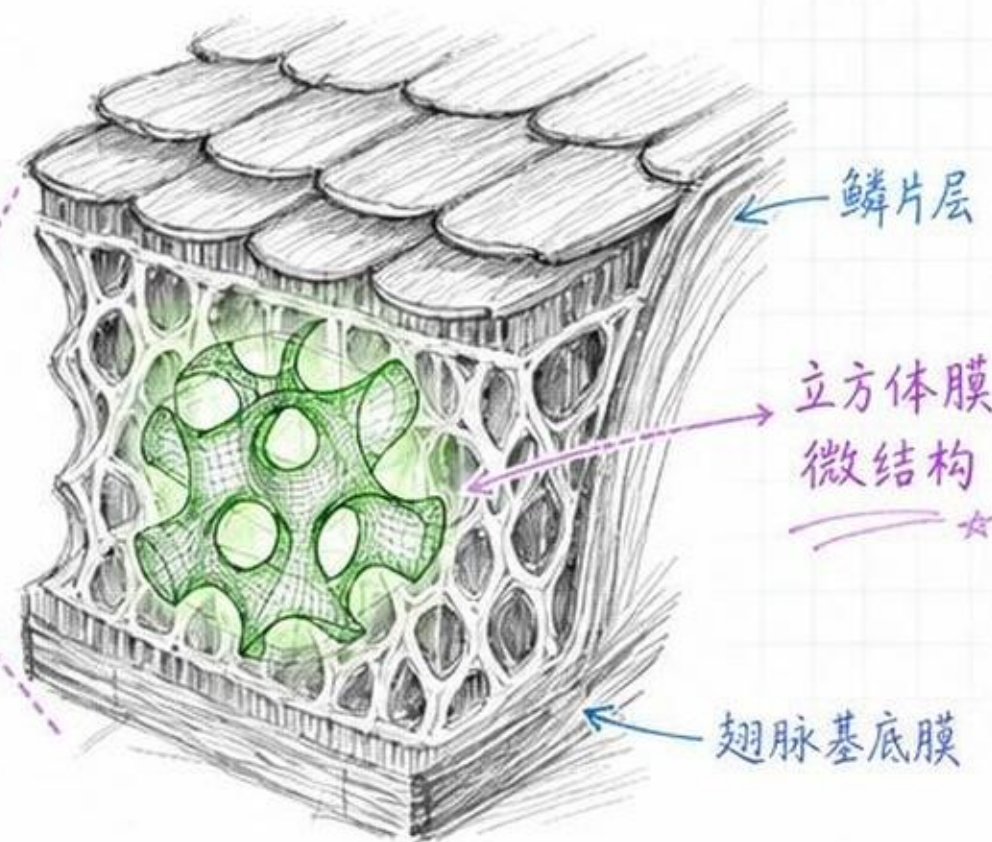
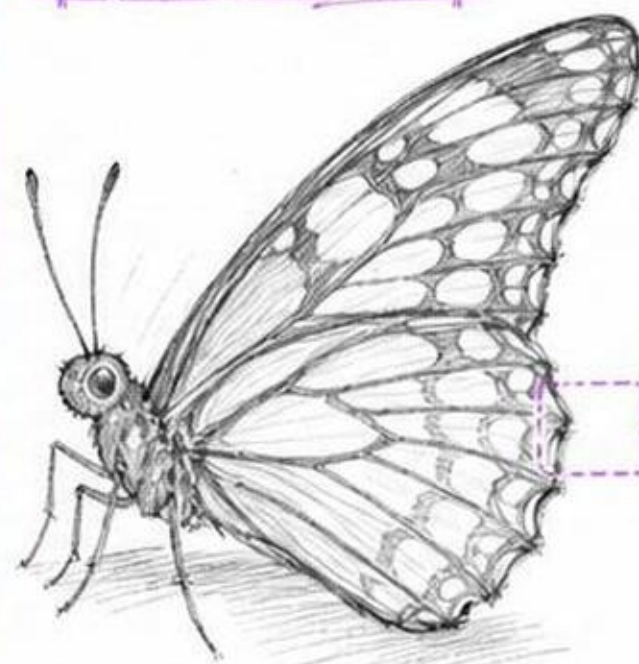
科学家观众留言

立方体膜...

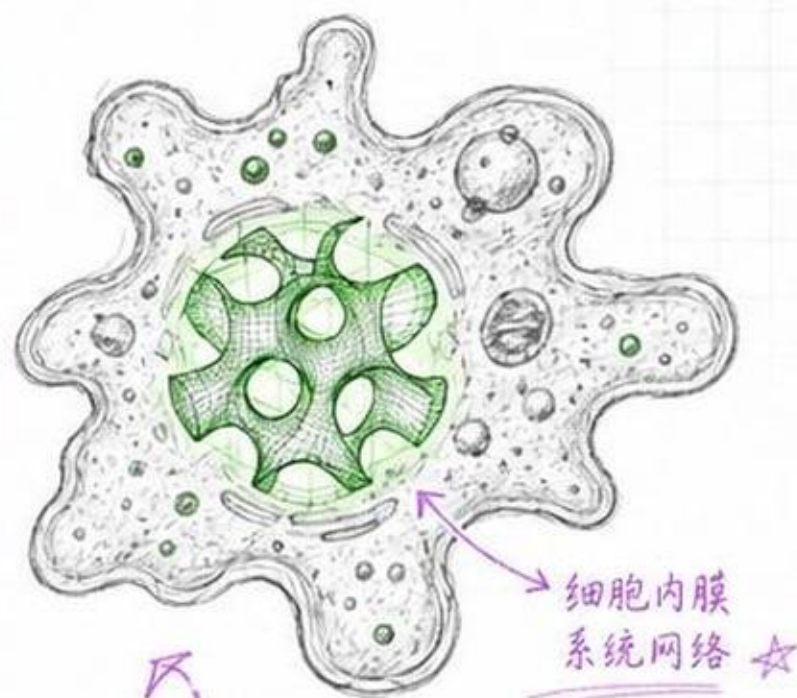
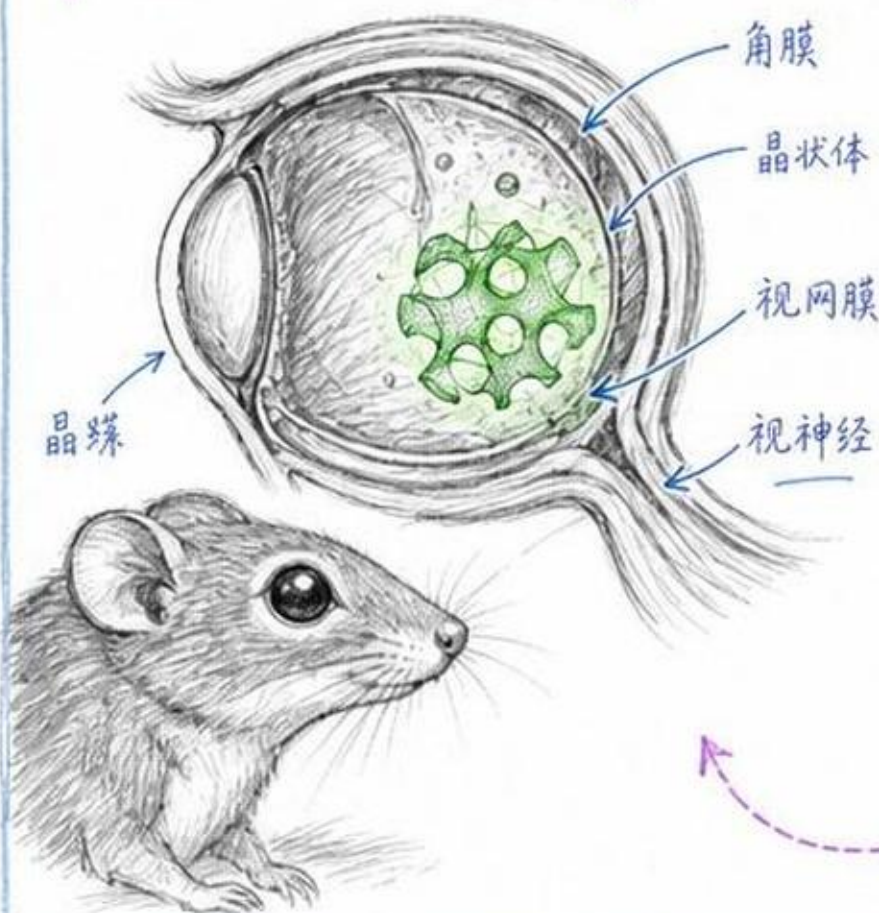
自然中隐藏的
通用几何语言?



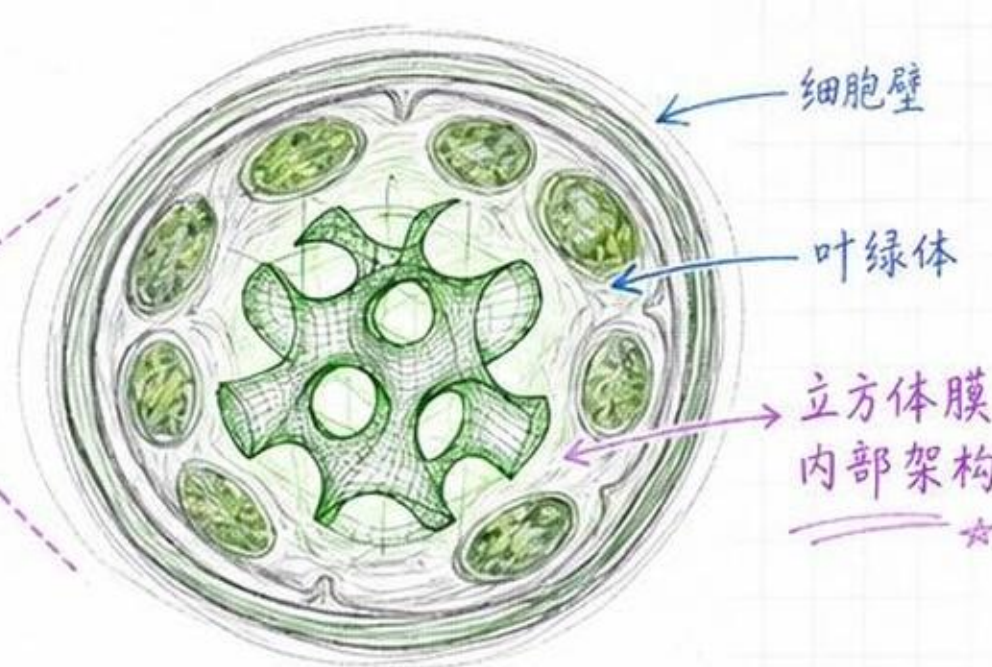
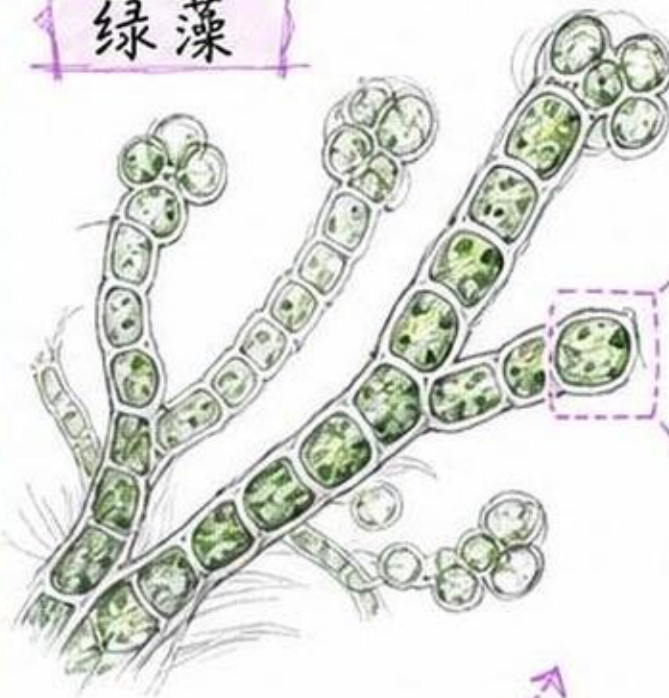
蝴蝶翅膀



树鼯眼睛 / 变形虫



绿藻



立方体膜 (Cubic Membrane)

三维周期性曲面



跨越物种与尺度,
自然反复使用的优雅几何解决方案

单细胞生命
在远古的海洋中
悄然诞生....

最近共同祖先
(约15亿年前)

巧合，还是
物理定律的指令？

看似毫不相干的
生命，却走向了
相同的几何之美。

最小曲面
能量最小化
 $\Delta A = 0$

蝴蝶翅膀

翅脉中的薄膜结构
轻盈而坚韧。

树鼯眼睛

视网膜的分层结构
高效的光学布局

变形虫

细胞膜的曲面结构
包裹与延展

绿藻

细胞内膜系统
支撑与运输

相同的结构
相同的数学
相同的物理约束

环境变迁
压力与机遇
驱动生命分化

进化时间轴

15亿年前

10亿年前

5亿年前

1亿年前

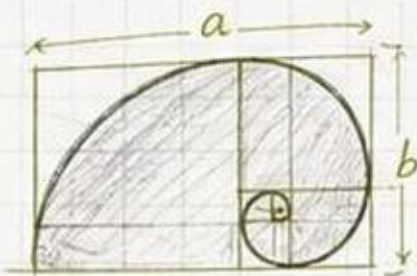
1000万年前

现在

造物主的执念

星系旋臂

黄金比例

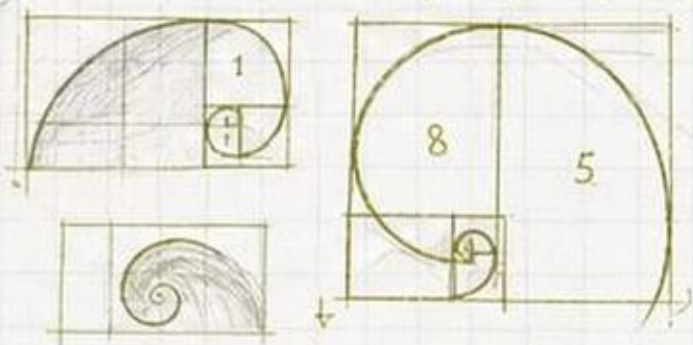


$$\frac{a}{b} = \phi$$

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

贝壳分形

1, 1, 2, 3, 5, 8,
13, 21, 34, 55, 89, ...



自相似性
跨越尺度
重复出现

细胞膜系统

从宏观到微观的几何回响

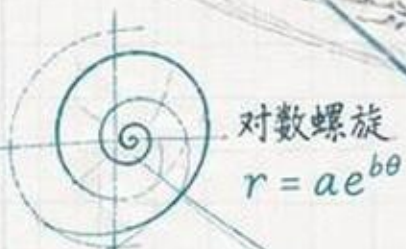
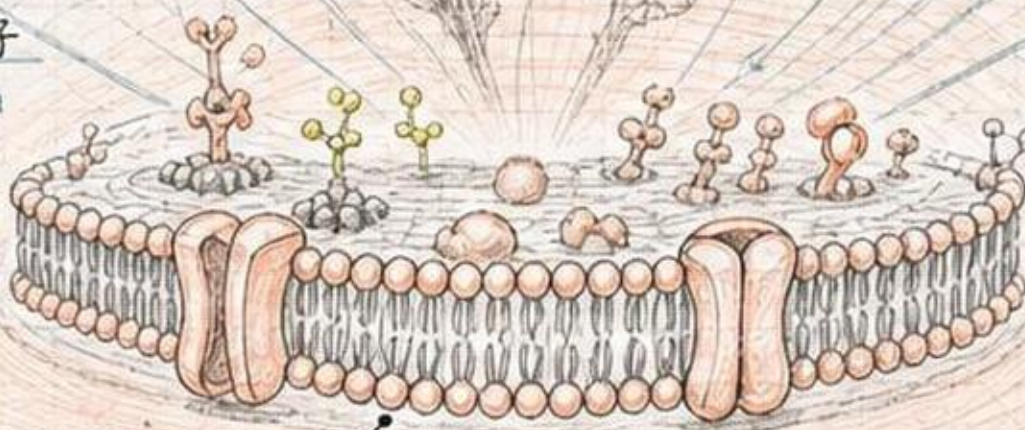


宇宙尺度
 $\sim 10^{26} \text{ m}$

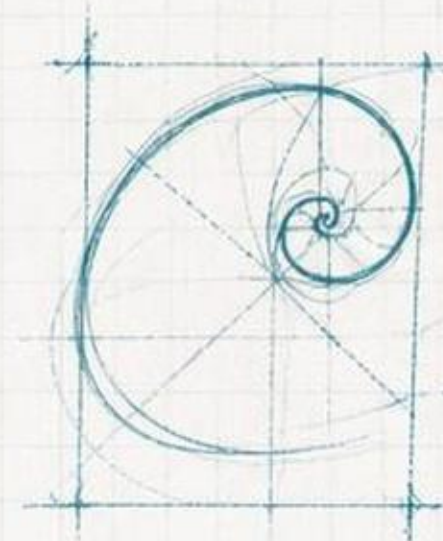
星系团
 $\sim 10^{22} \text{ m}$

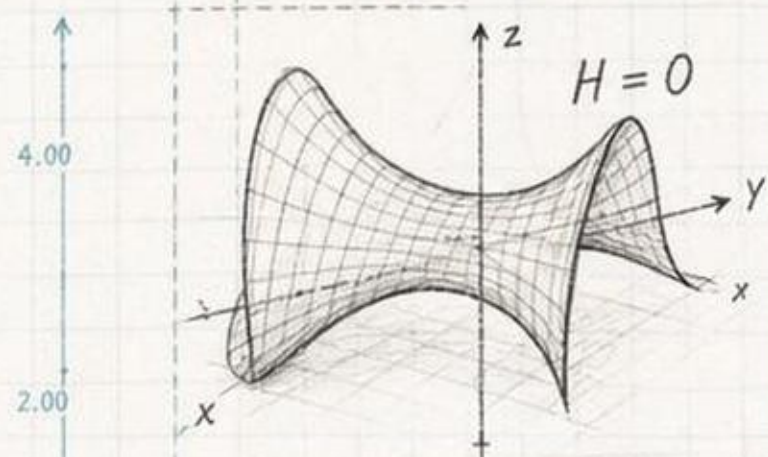
行星系统
 $\sim 10^{16} \text{ m}$

生命分子
 $\sim 10^{-9} \text{ m}$



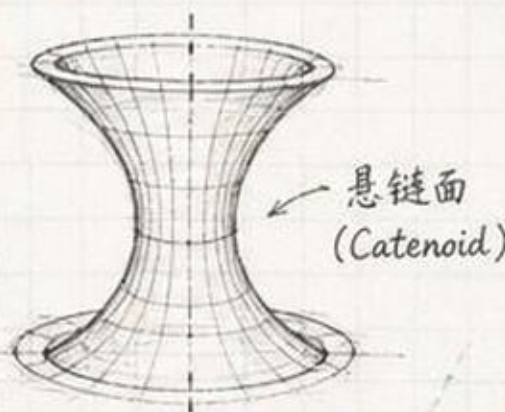
对数螺旋
 $r = ae^{b\theta}$





极小曲面方程

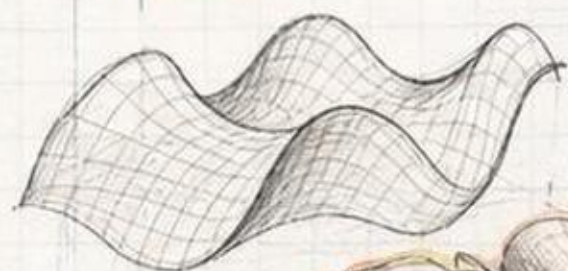
$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{Eg_u - Fg_v}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{Gg_v - Fg_u}{W} \right) = 0$$
$$W = EG - F^2$$



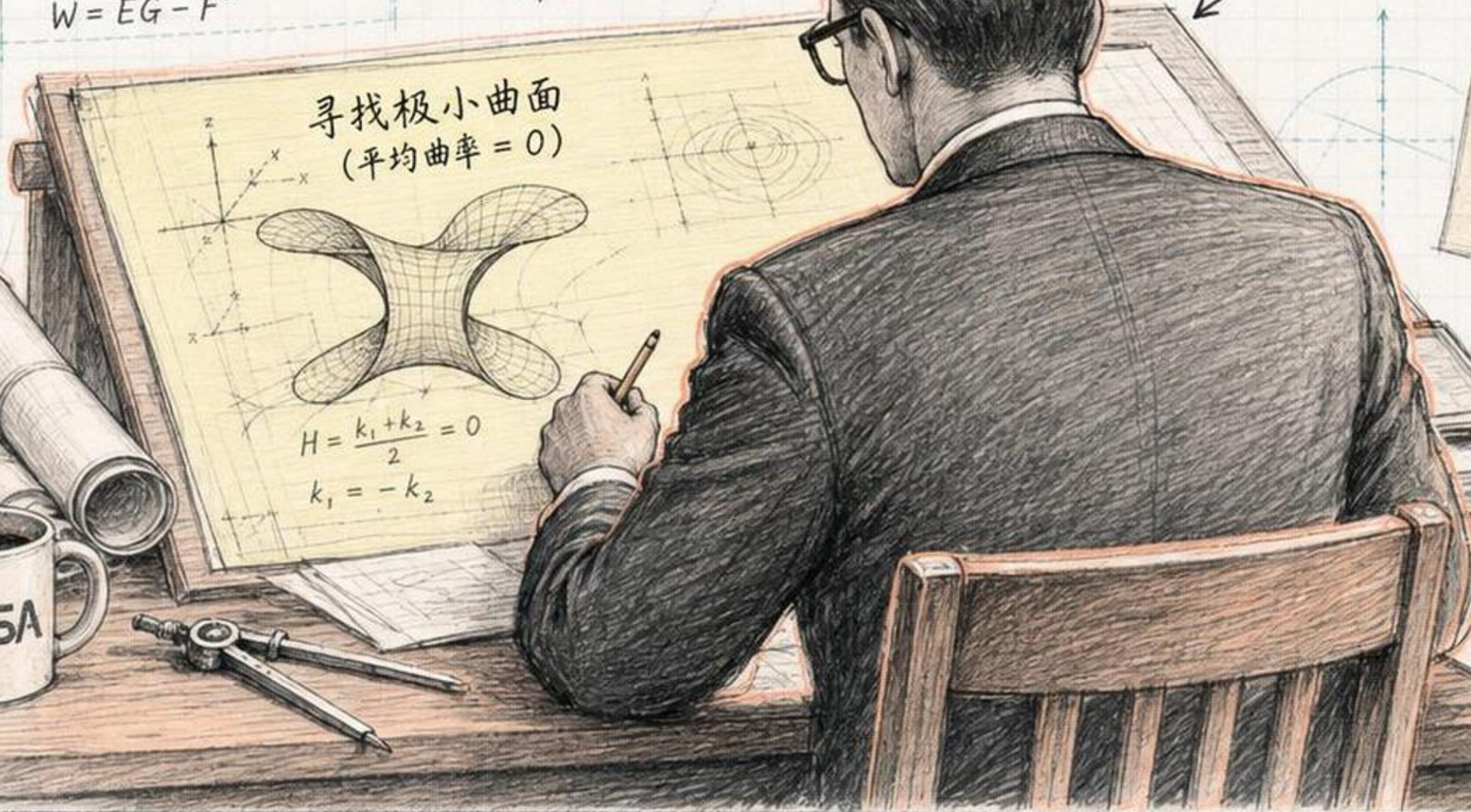
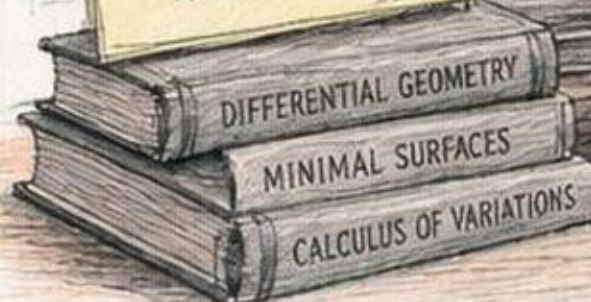
艾伦·舍恩 / Alan Schoen
— NASA几何应用办公室



$$H = \frac{1}{2} \nabla \cdot n = 0$$



几何之美
源于简洁的
方程与对称。



寻找极小曲面
(平均曲率=0)

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0$$
$$k_1 = -k_2$$



$$K = k_1 k_2 < 0$$
$$H = 0$$



1967年

几何应用办公室成立
NASA 兰利研究中心



阿波罗计划推进
对轨道与结构优化的
数学需求日益增长



几何方法应用于
材料、结构与流体
等复杂问题



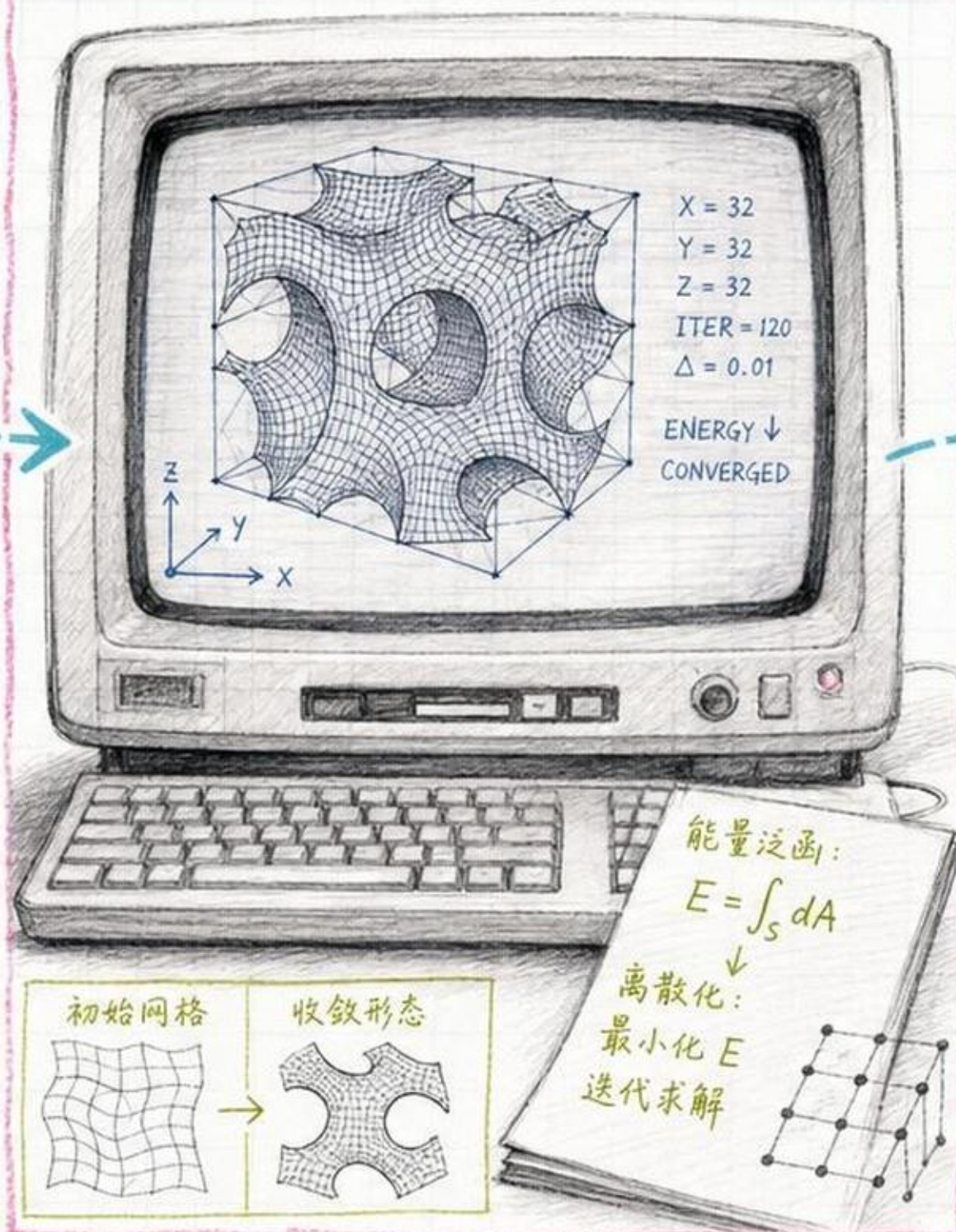
数学与工程的结合
为太空探索提供
坚实的理论支撑

探索未知
始于方程

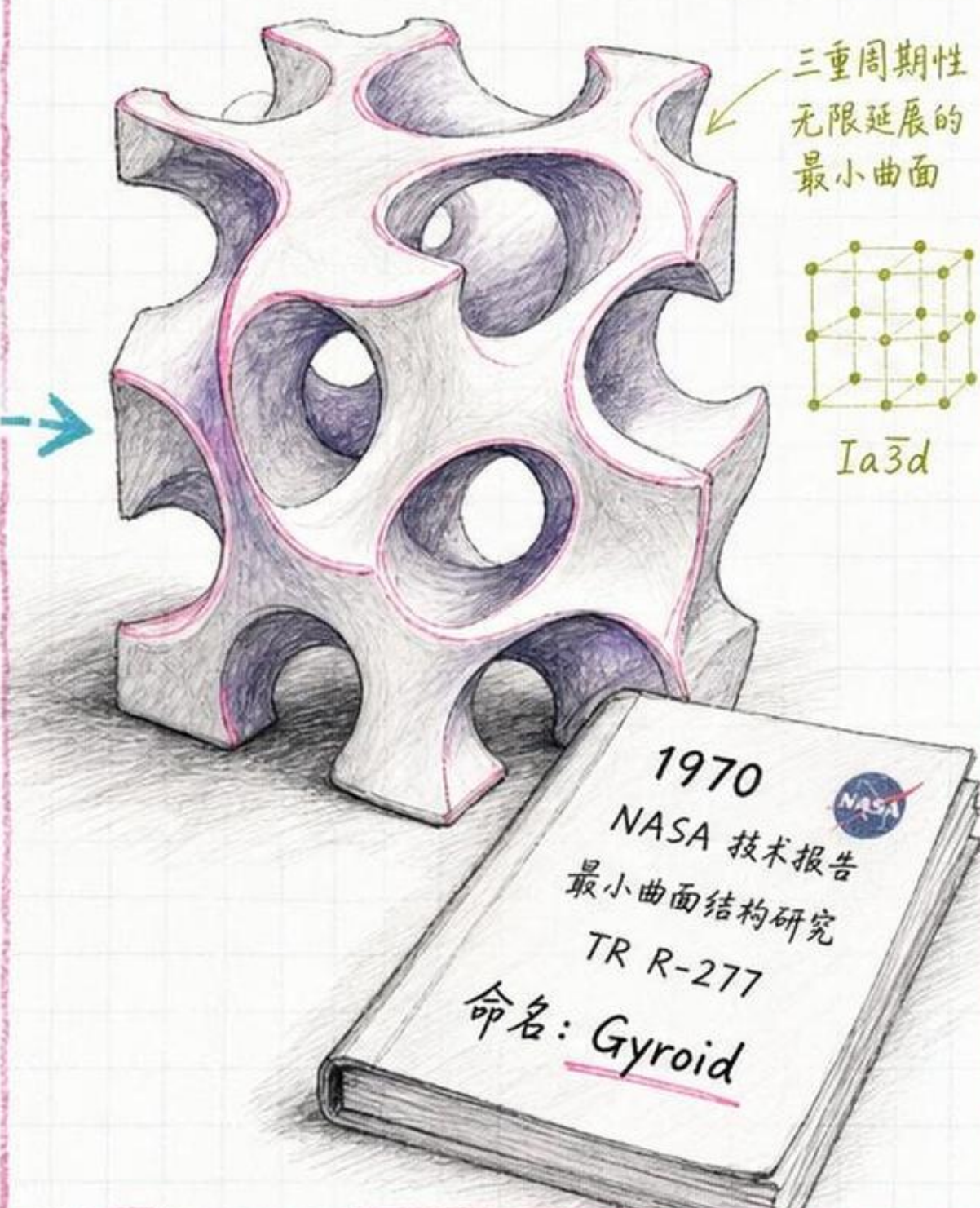
肥皂膜 — 最小曲面的物理直觉



早期计算机图形学验证



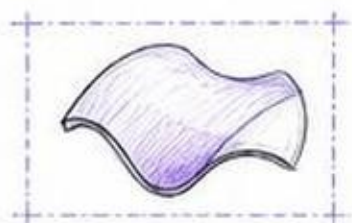
1970 NASA 技术报告 — 命名: Gyroid



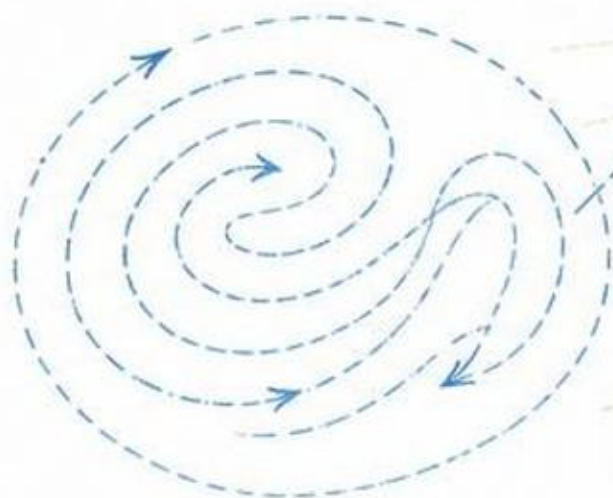
舍恩用三年时间找到了三维空间最省能量的答案



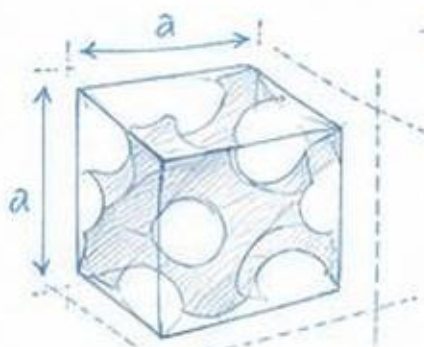
弯曲薄膜, 无直线段



- 连续光滑
- 无边界、无棱角

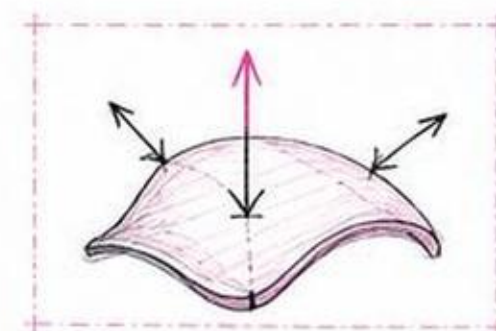


两个缠绕的迷宫通道,
永不相交

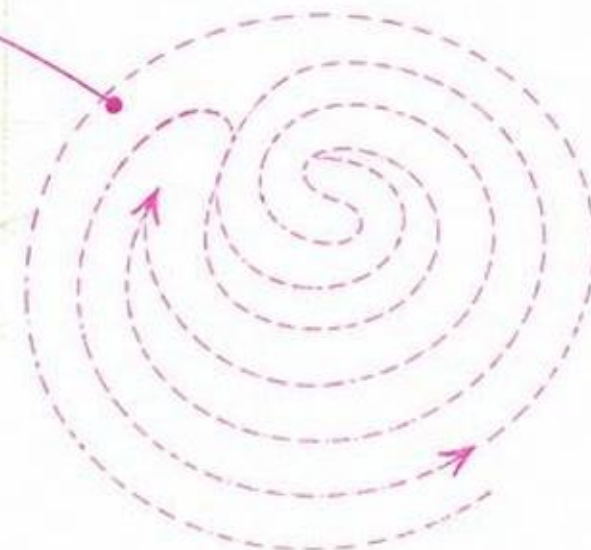


周期性结构

每一点力学平衡完美



平均曲率 = 0



Gyroid

三维空间里, 弯曲薄膜最轻松的姿势

$$\begin{aligned} H &= 0 \\ \nabla \cdot n &= 0 \\ &(\text{平均曲率为零}) \end{aligned}$$



人类数学家：严格证明，耗时26年

远古蝴蝶：热力学直觉，瞬间求解



时间的积累



《皇家学会界面杂志》2008

界面科学与工程跨学科研究期刊

第5卷 | 第S2期 | 2008年4月7日

《皇家学会界面杂志》
2008

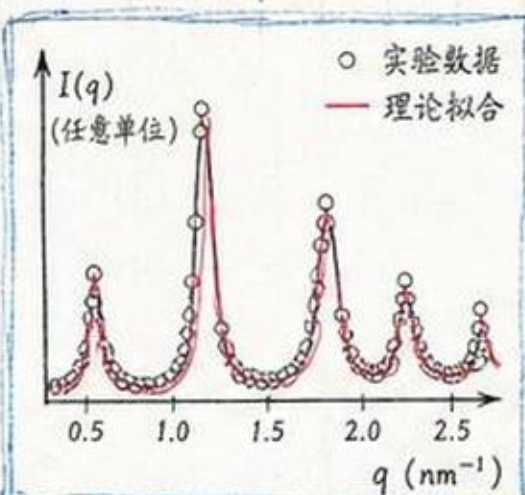
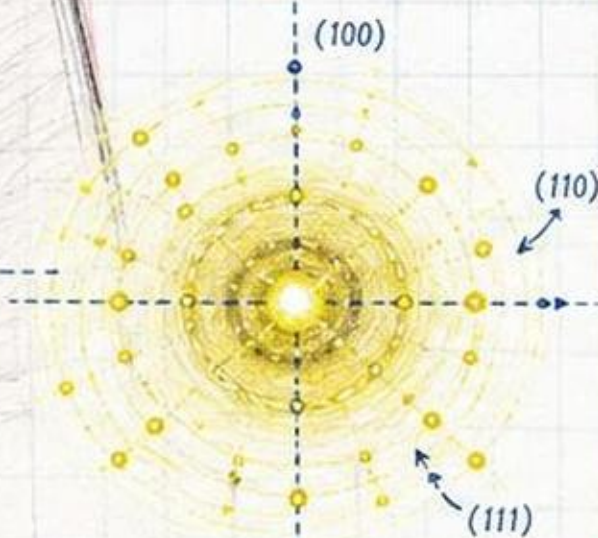
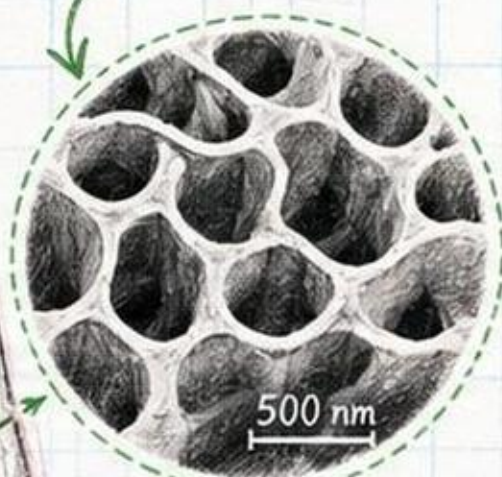
VOL.5
SUPPL.2

THE
ROYAL
SOCIETY
Interface

内部结构精确匹配
Gyroid

Gyroid 最小曲面
 $Ia\bar{3}d$ 对称性

扫描电镜 (SEM)
图像



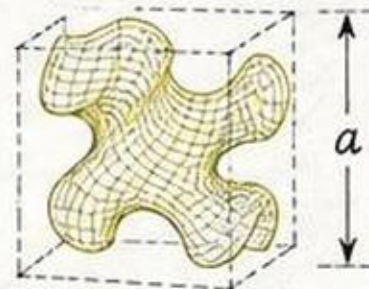
★ 结构与测量数据 ★

晶格类型: $Ia\bar{3}d$ (双重 Gyroid)

晶格常数 (实验):

$$a = 145.6 \pm 1.2 \text{ nm}$$

(数学预测: 145.0 nm)



小角 X 射线散射峰位 (nm^{-1})

(hkl)	实验值	理论值	相对误差
(110)	0.815	0.812	0.37%
(211)	1.410	1.407	0.21%
(220)	1.628	1.625	0.18%
(321)	2.107	2.103	0.19%
(400)	2.303	2.301	0.09%

拟合优度 $\chi^2 = 1.08$

★ 晶格参数

与数学预测值高度吻合



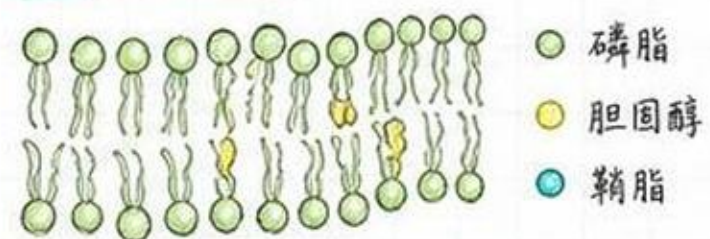
结论: 蝴蝶翅膀鳞片内部结构与 Gyroid 最小曲面模型精确匹配, 生物自组装实现了数学最优结构。



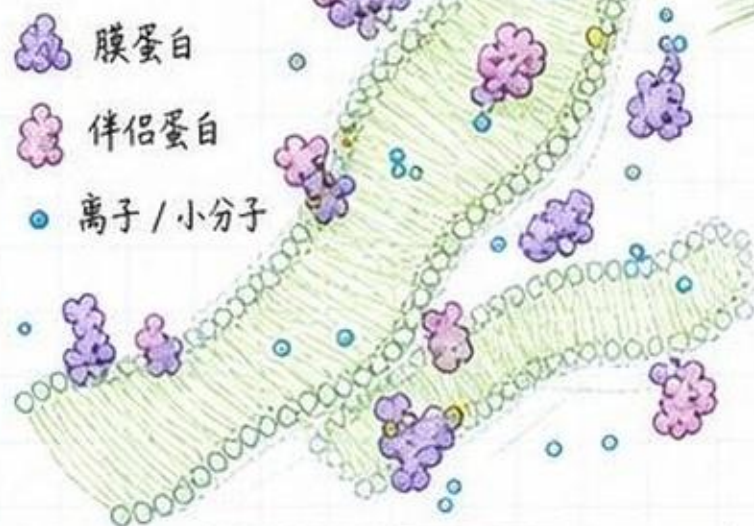
自然的精妙设计 × 数学的优雅结构 = 真实的完美匹配

脂质组成与蛋白质环境

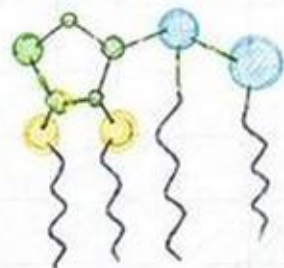
脂质双分子层



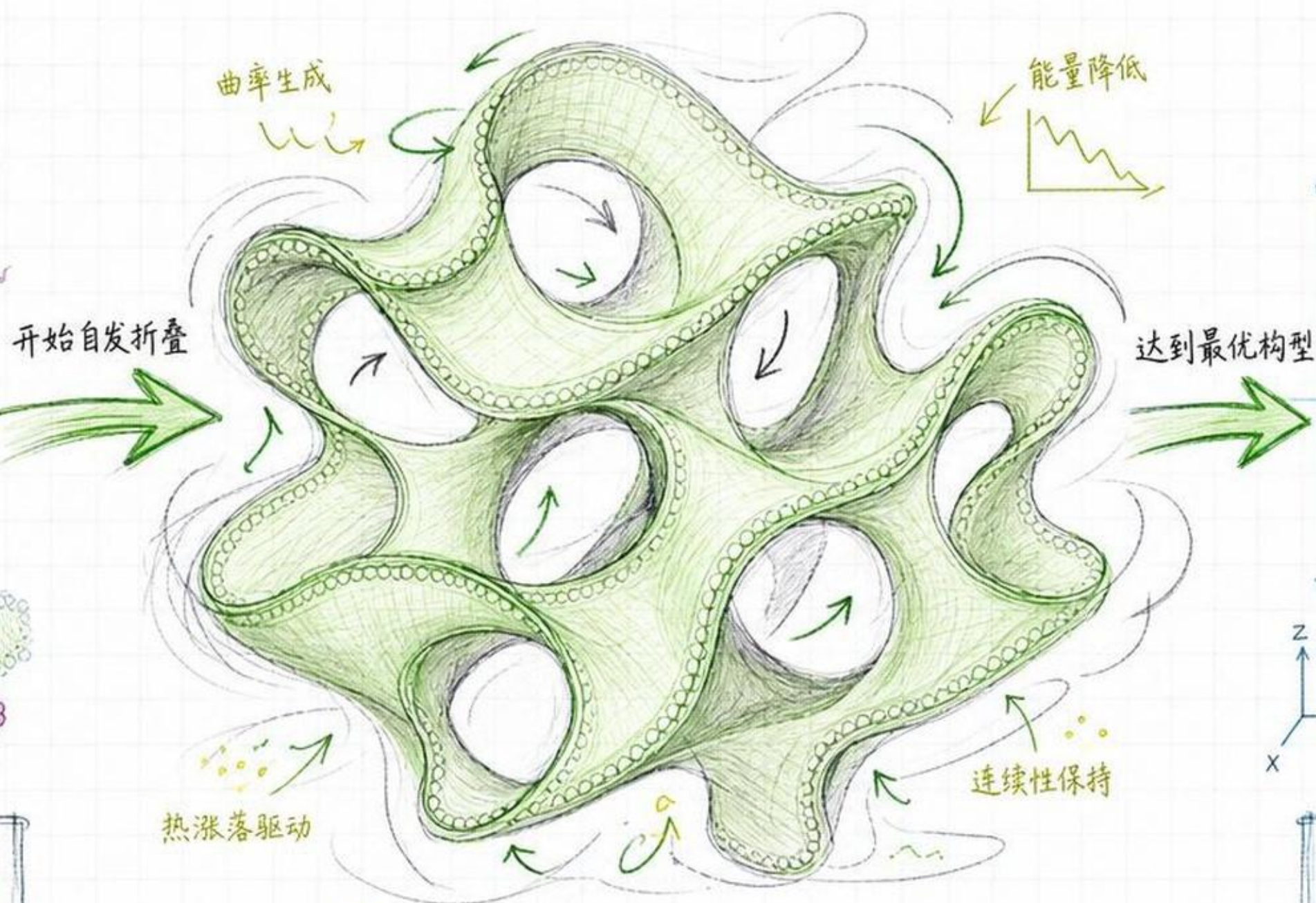
蛋白质环境



- ✓ 流动性
- ✓ 曲率偏好
- ✓ 分子比例平衡
- ✓ 温度与离子强度

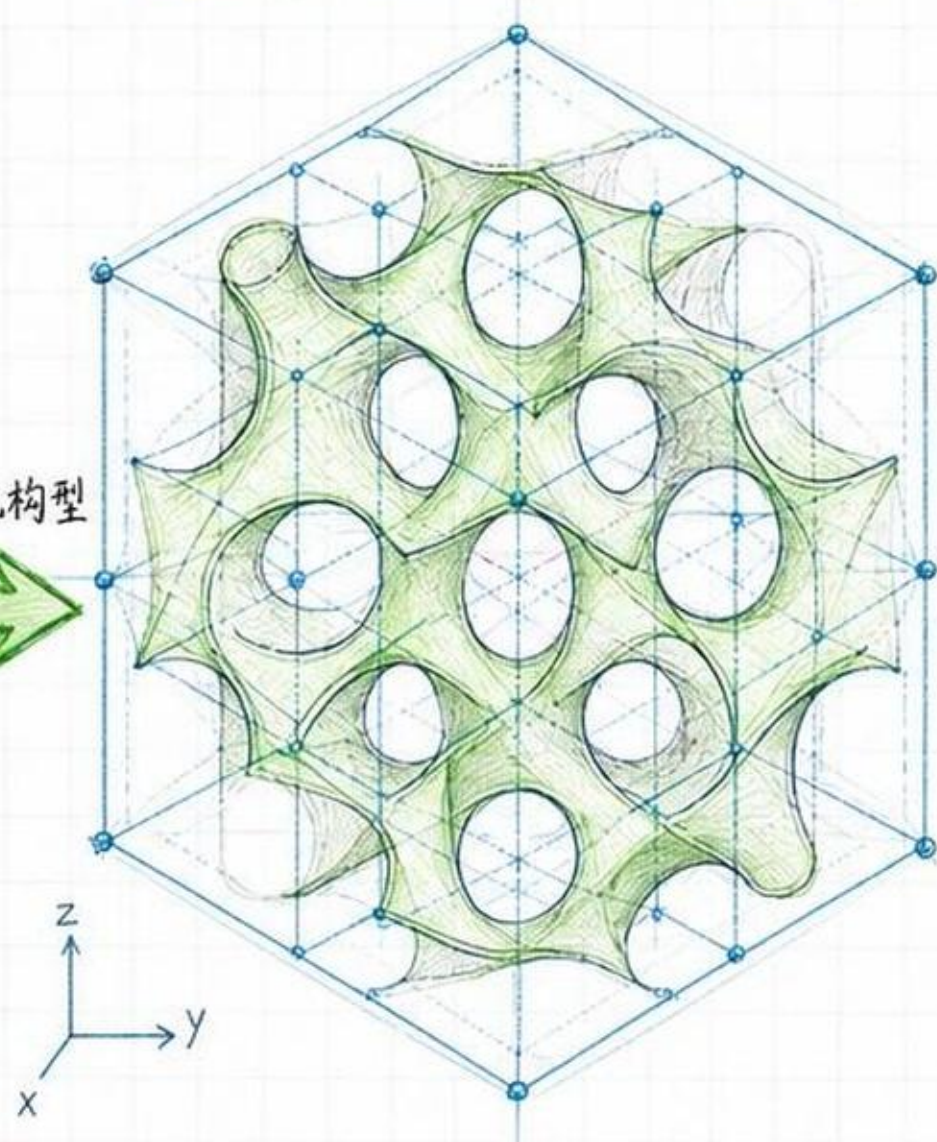


自动寻找最低能量状态

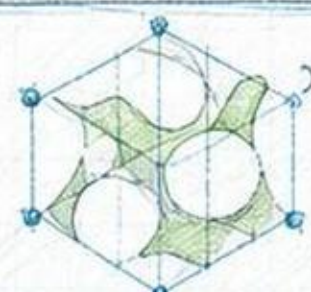


无需基因特别指令，自发折叠

完美的 Gyroid 雏形



- ✓ 三重周期最小曲面
- ✓ 最小表面积/体积比
- ✓ 连续双通道网络
- ✓ 热力学稳定



→ 自发过程方向

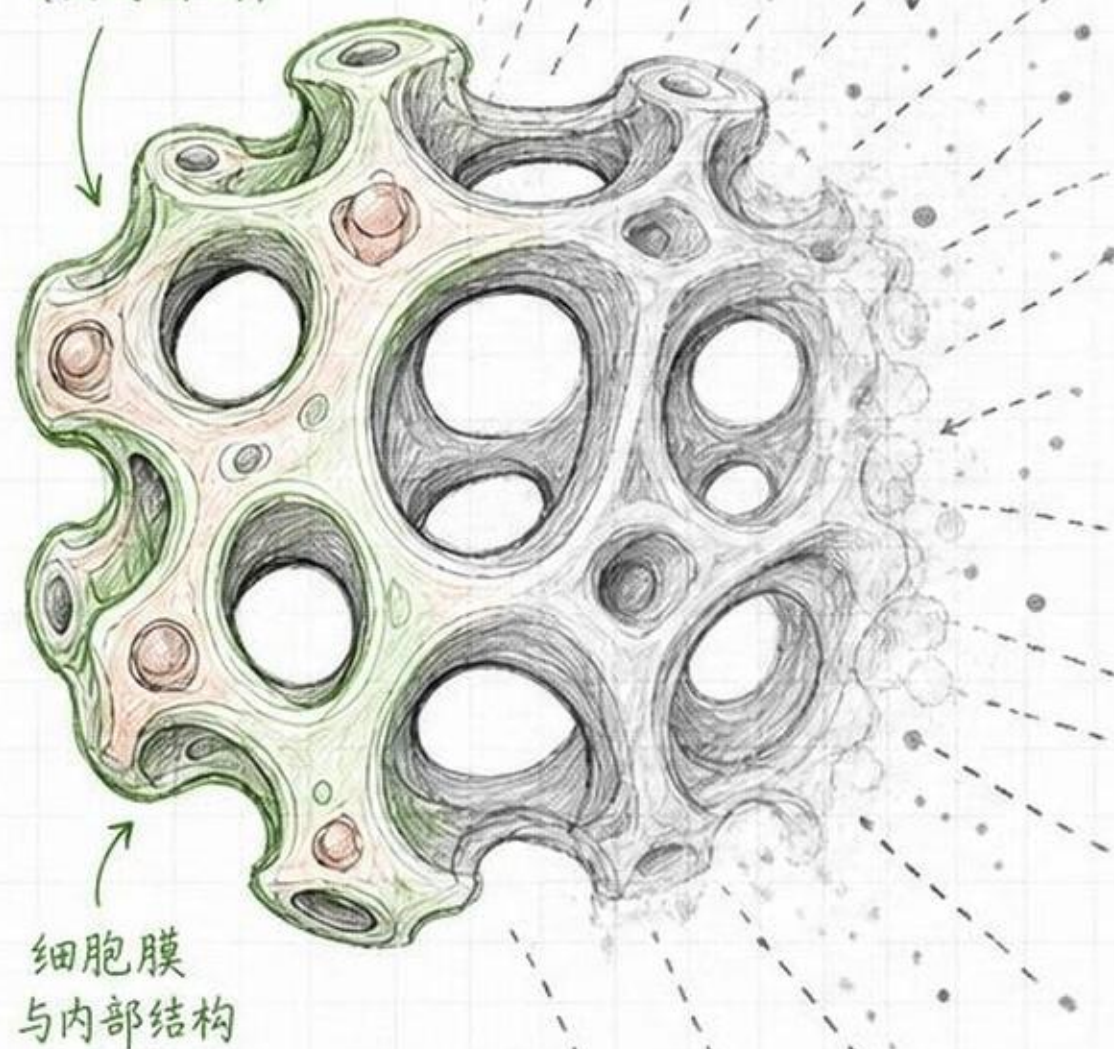
膜流动与重排

能量状态降低

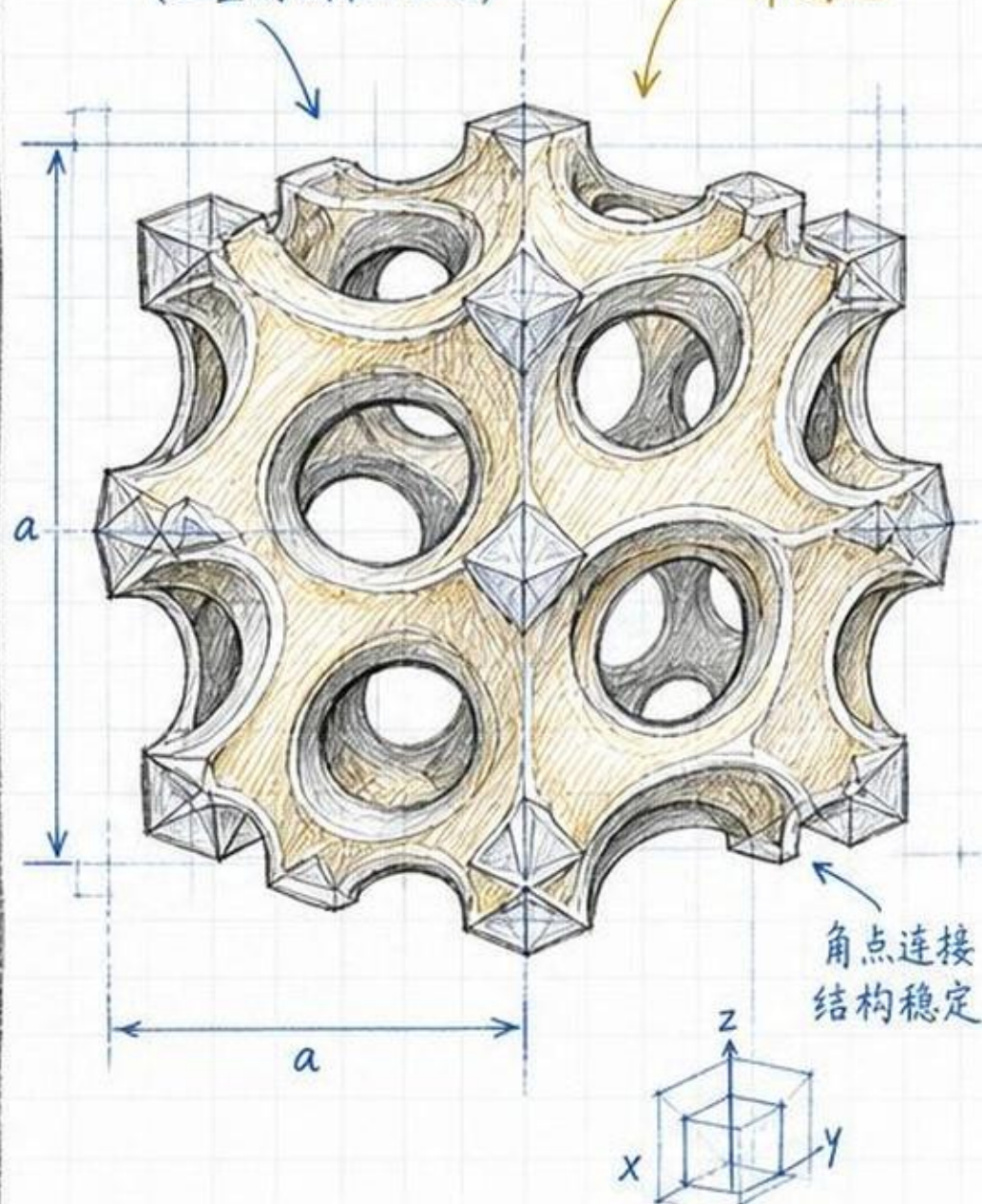
热涨落扰动

曲率演化路径

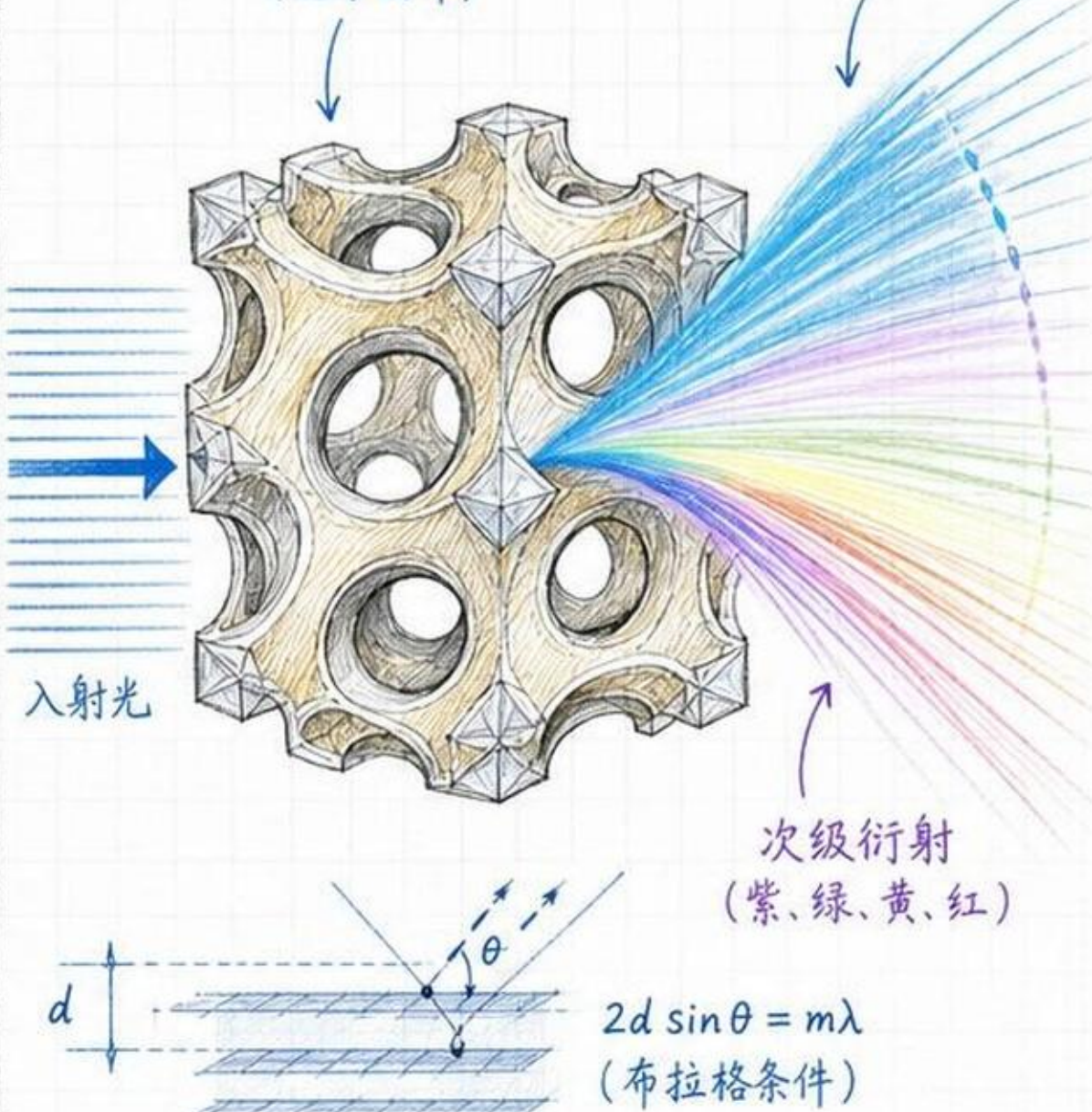
1

活细胞
(虫翅前期)细胞凋亡
逐渐退化

2

周期性结构
(三重周期最小曲面)角质蛋白填充
并固化

3

周期性折射率调制
(光子晶体)布拉格衍射
主峰: 蓝光

① 细胞凋亡与固化



② 固态光子晶体形成



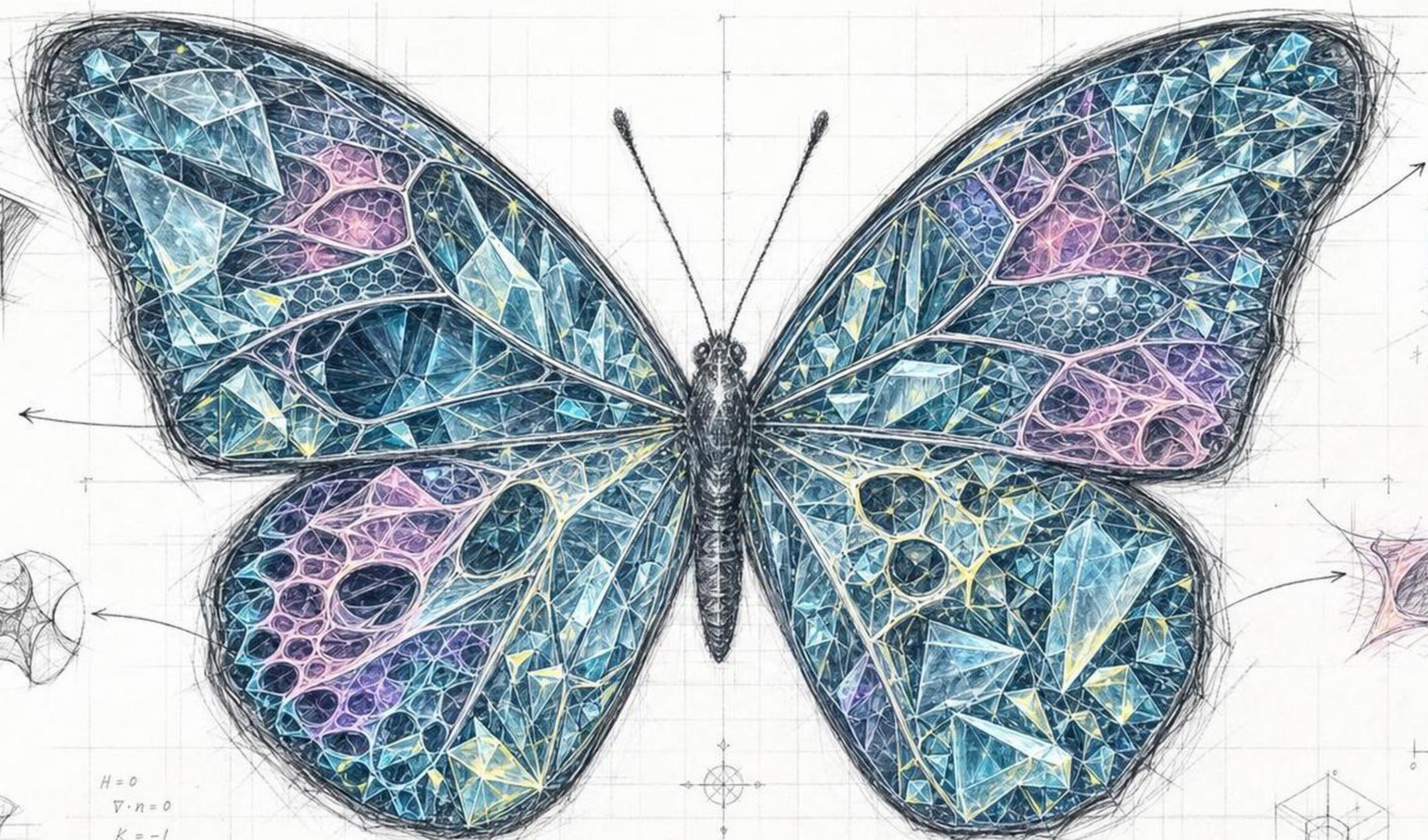
③ 布拉格衍射 → 纯净蓝光



无颜料, 纯结构生色



Fig. 01
Wing Cross-Section



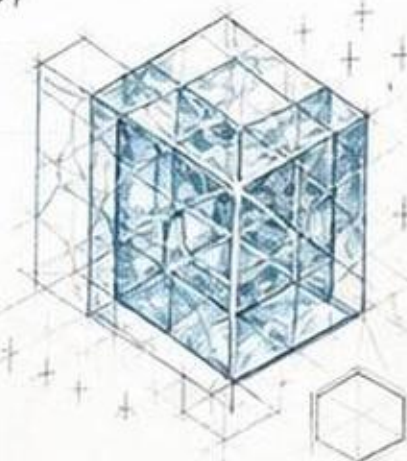
六方膜结构
精确堆叠

Gyroid
Lattice

复杂最小曲面
自然的数学之美

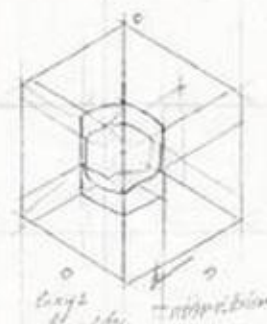
$$\begin{aligned} H &= 0 \\ \nabla \cdot n &= 0 \\ K &= -1 \end{aligned}$$

固态光子晶体 · 永恒定格



Membrane Fold Detail
膜褶皱细节
时间的褶皱

Scale 1:1000



t → ∞
时间冻结

时间冻结的快照

—◇— 一个细胞在死亡瞬间折叠成最完美的形状 —◇—

人类纳米加工

工程挑战：缺陷与精度极限

误差累积
难以避免!

加工误差

刀具磨损、振动、
热效应导致尺寸
偏差与形貌破坏

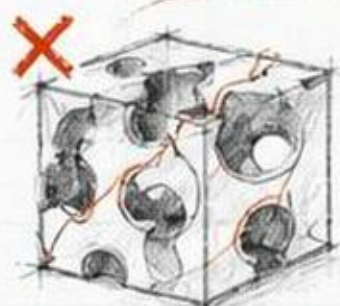
对准失效

多层堆叠难以
精确对齐，累积
偏移放大

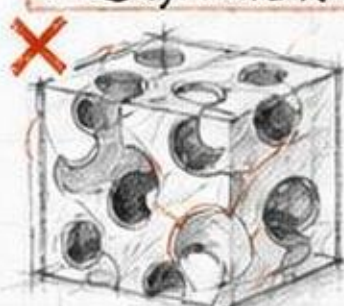
表面粗糙

加工痕迹明显，
边缘毛刺，散射损耗
增加

人造Gyroid结构常见缺陷



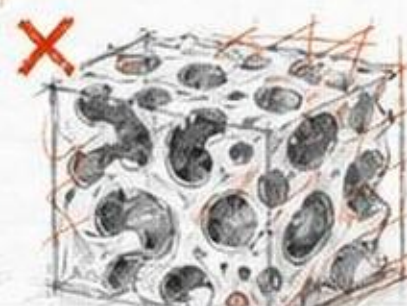
孔洞/断裂
结构不连续



尺寸偏差
单元不一致



表面粗糙
散射损耗大



缺陷积累
性能显著下降

VS

设计目标

光子晶体
Gyroid结构

制造方式

外部加工
VS
自组织

结果对比

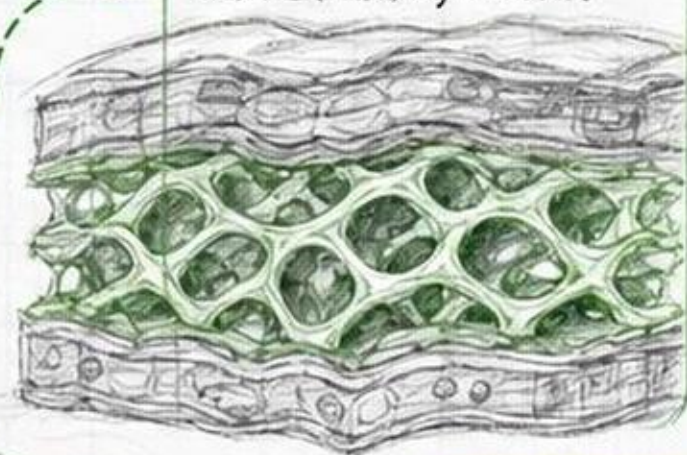
缺陷累积
VS
完美连续

蝴蝶自组装

生物化学过程：完美无瑕

蝴蝶翅膀内部结构

由真皮细胞分泌物自组装形成
天然光子晶体Gyroid结构



自组装驱动

分子自发有序排列，
能量最小化驱动形成
完美Gyroid结构

纳米级精度

特征尺寸均一，
偏差 < 1 nm，
跨尺度精确控制

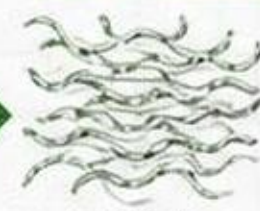
无瑕表面

原子级光滑表面，
最小散射损耗，
光学性能卓越

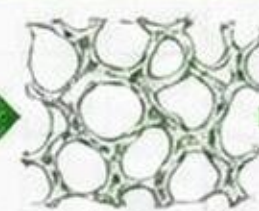
生物自组装过程（从分子到Gyroid）



分子分泌



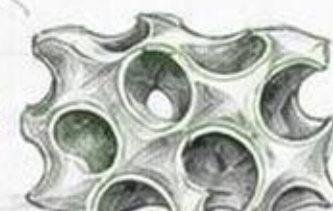
自发排列



初步网络形成



Gyroid结构生成



完美连续结构



自然的杰作：特征尺寸 ~10-100 nm，完美有序，性能极致
亿万年进化，造就无与伦比的光学奇迹!

下一个震惊案例 >>>

树鼯

灵长目近亲 · 东南亚热带森林



1°N-20°N
95°E-140°E

分布区域

视锥细胞

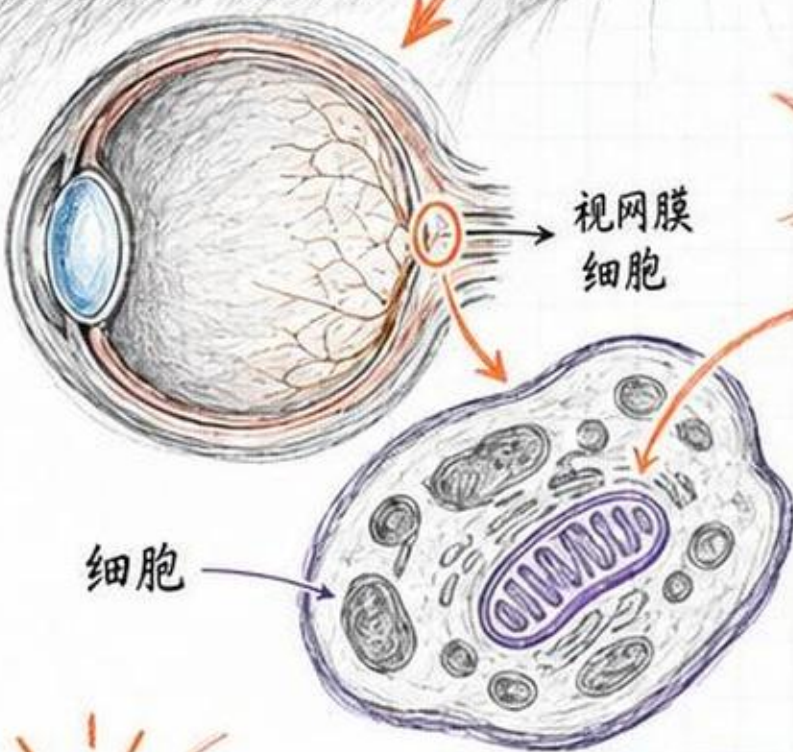
— 异常巨大的线粒体



巨型线粒体解剖

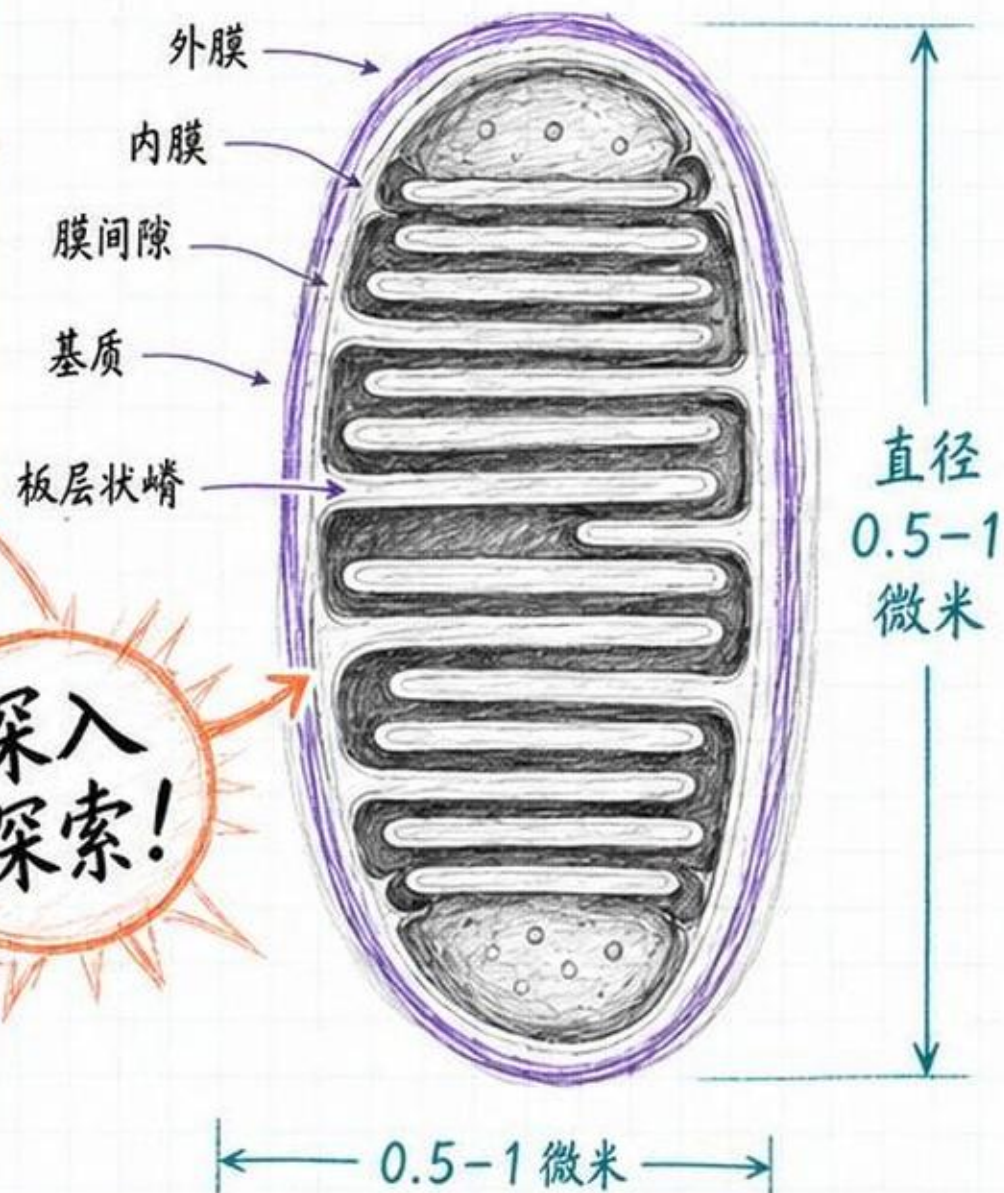
树鼩 (Treeshrew)

放大!

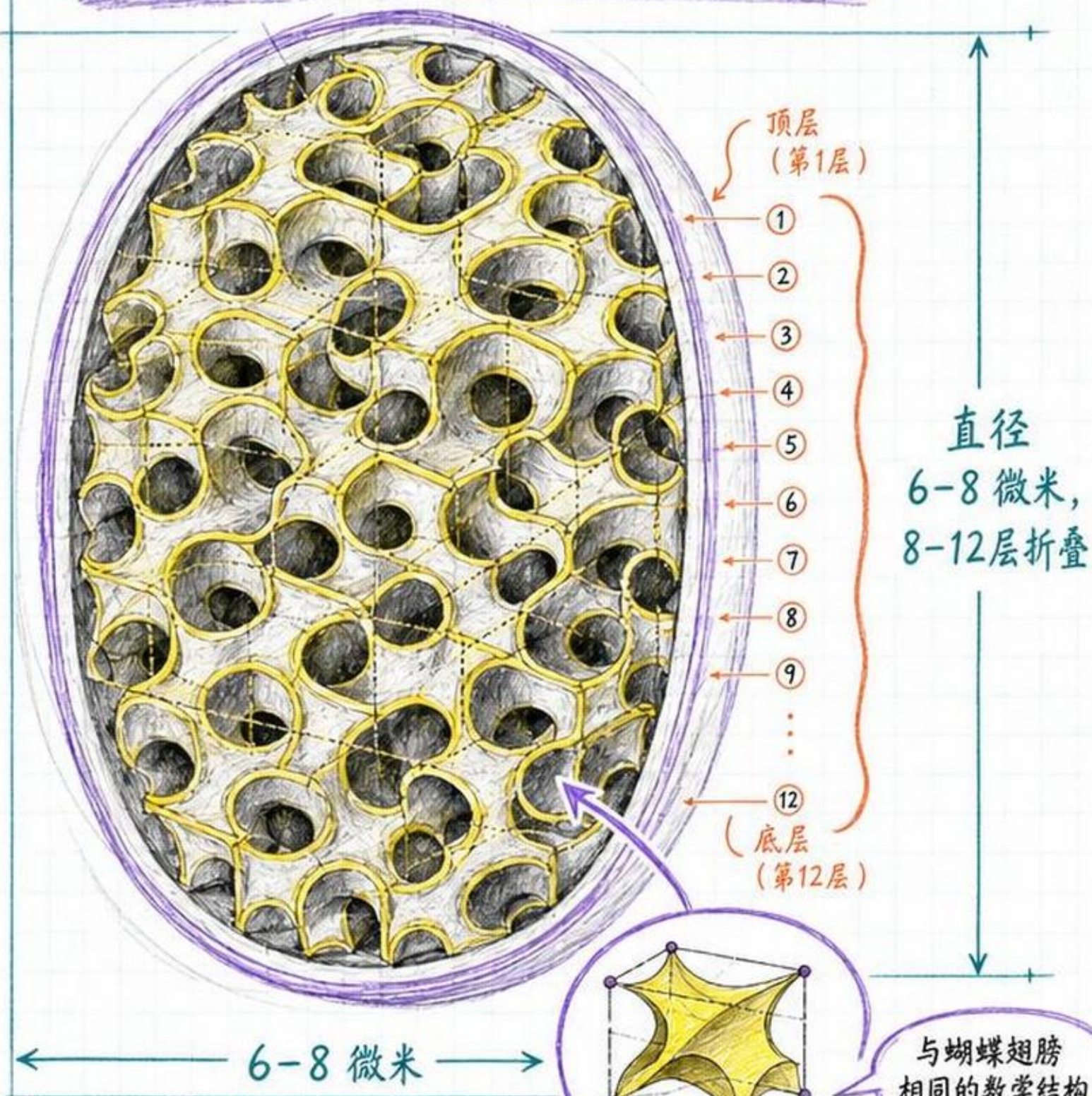


深入探索!

普通线粒体 (板层状嵴)

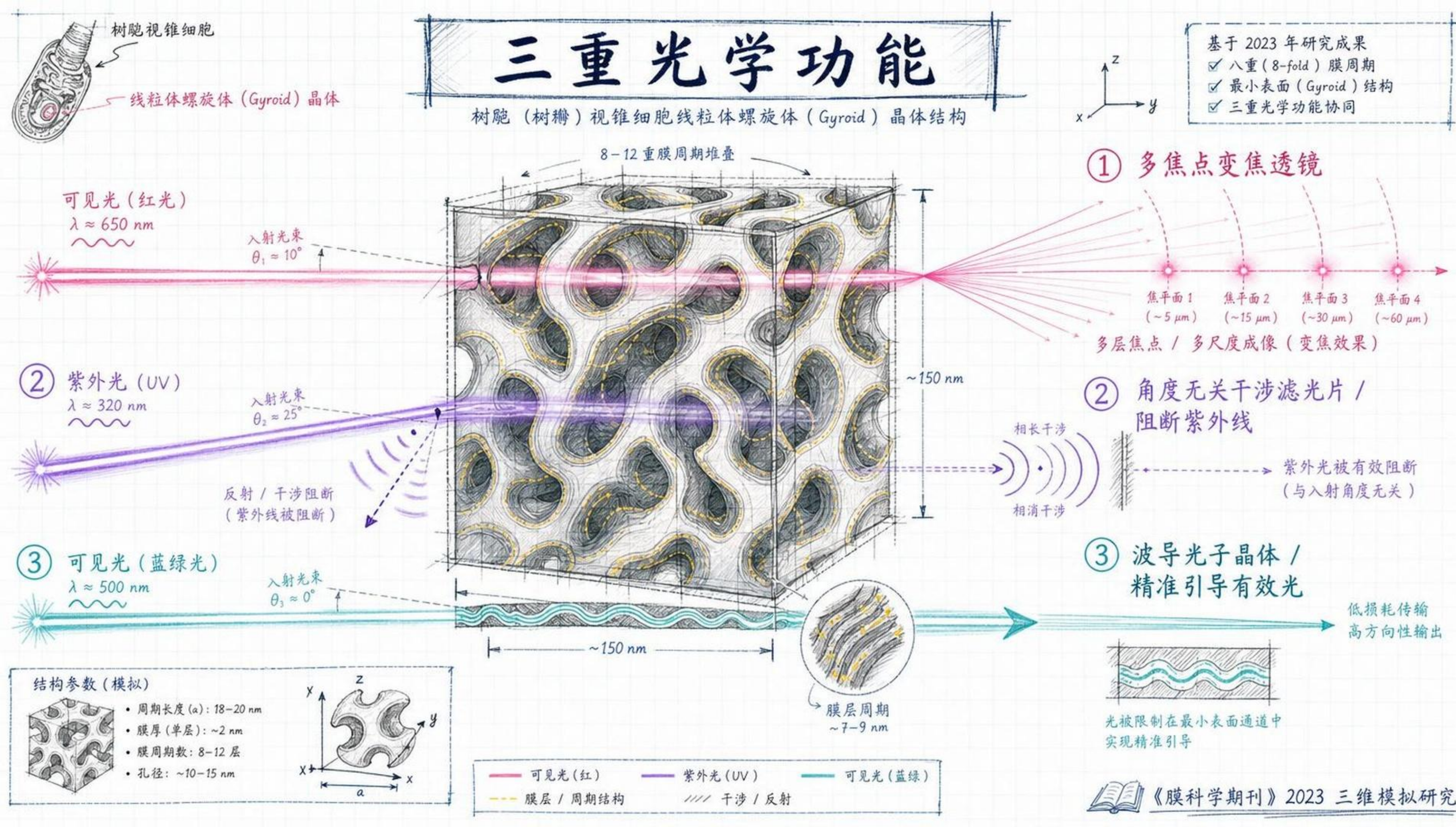


巨型线粒体 (Gyroid 立方体膜)



巨型线粒体通过 Gyroid 立方体膜结构, 最大化膜表面积, 为视网膜高能量需求提供强大支持。★

结构轮廓 (膜) Gyroid 膜网络 尺寸/测量标注 放大路径/注释



线粒体的极致进化设计

细胞供能发电站 (合成ATP)



能量输出流程:
1. 底物氧化
2. 电子传递链
3. 氧化磷酸化
4. 合成ATP

每秒数百万个
ATP 生成

同一器官

一器两用
完美协同

结构共生
功能分化

高效产能
持续输出

视锥精密光学透镜系统



处理光信号

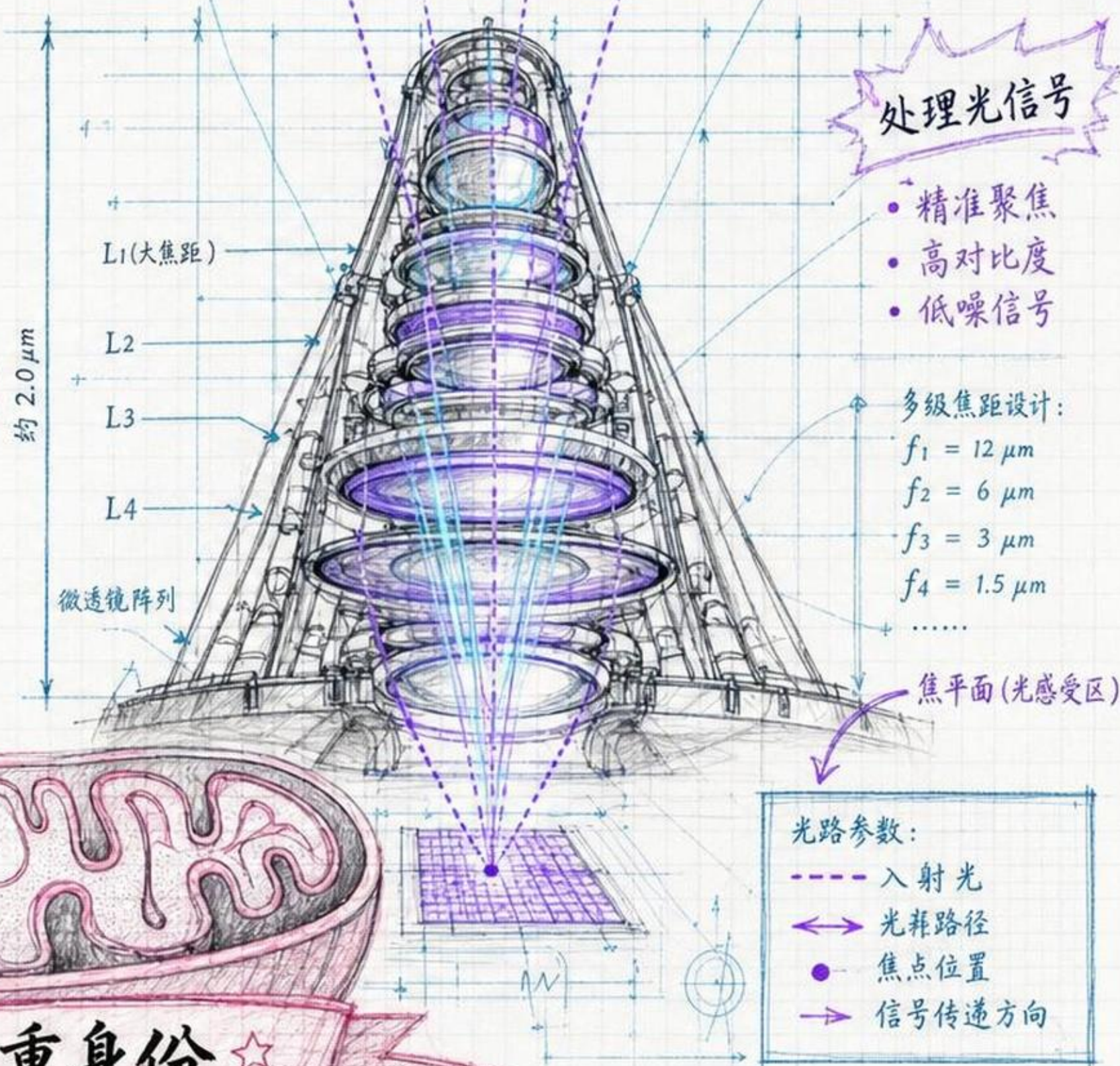
- 精准聚焦
- 高对比度
- 低噪信号

多级焦距设计:
 $f_1 = 12 \mu\text{m}$
 $f_2 = 6 \mu\text{m}$
 $f_3 = 3 \mu\text{m}$
 $f_4 = 1.5 \mu\text{m}$
.....

焦平面 (光感受区)

光路参数:

- 入射光
- 光路路径
- 焦点位置
- 信号传递方向



☆ 一器两用 · 双重身份 ☆

结构决定功能
几何承载意义

形状本身就是信息

Geometry is Information

内膜折叠



几何形变

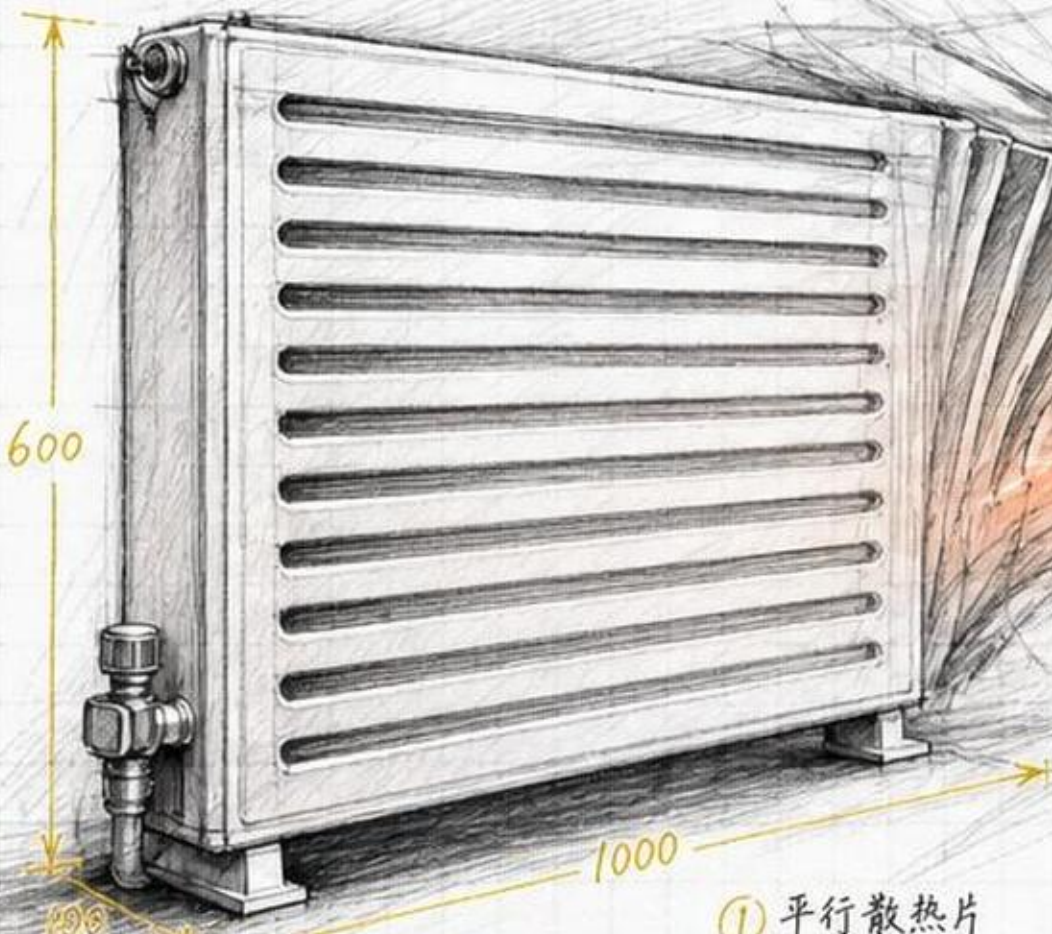
同样的材料，
全新的功能

内膜折叠

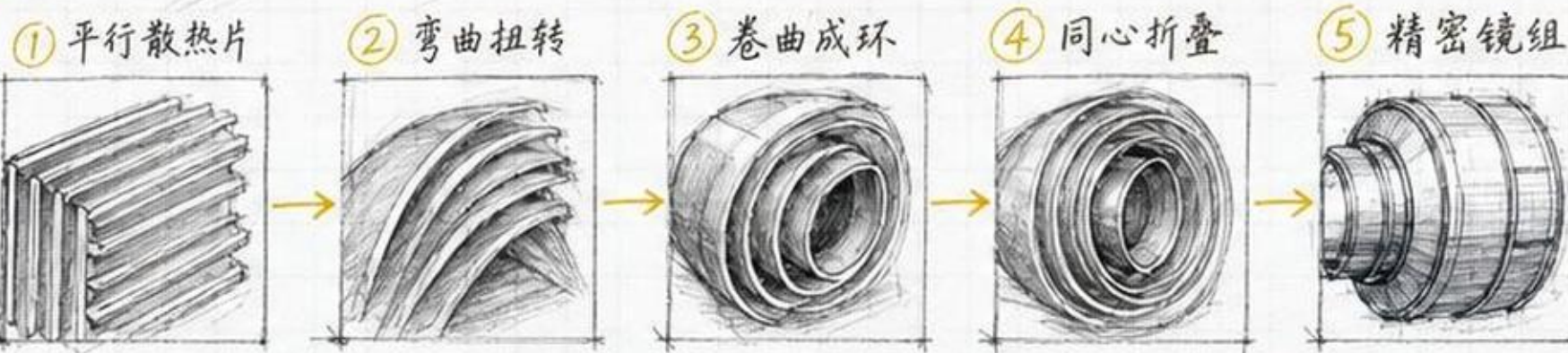
高倍物镜
100x / 1.4 NA

显微镜

在几何中编码功能，
在形状中发现可能。



散热器



- 形态 = 功能
- 形状 = 信息
- 几何 = 语言



变形虫（原生生物）- 营养匮乏 / 渗透压胁迫

绿藻水绵（植物）- 紫外线胁迫

渗透压升高
细胞失水

紫外线
UV-B

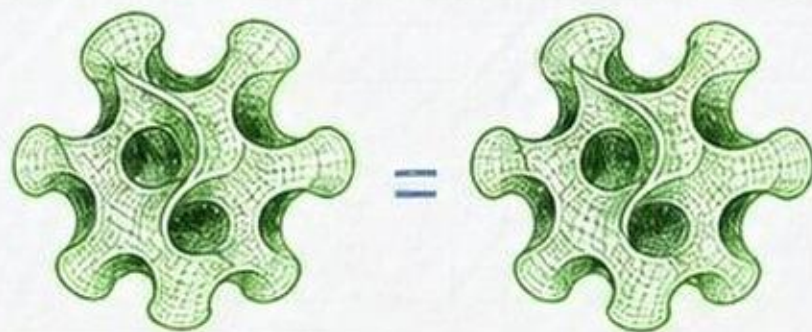
同一种几何图腾

DNA 损伤
活性氧升高
光合作用受抑

细胞内变化过程:

- ① 膜系统紊乱
- ② 囊泡聚集
- ③ 结构重构
- ④ 形成极小曲面结构

自发重组: 极小曲面结构



细胞内变化过程:

- ① 叶绿体应激
- ② 活性氧积累
- ③ 内部结构重组
- ④ 形成极小曲面结构

最近共同祖先：约15亿年前

节肢动物·蝴蝶

哺乳动物·树鼩

15亿年前

现今

翅膀鳞片的
多层微结构
产生结构色

视网膜的
光感受层
提高视觉灵敏度

产生颜色

聚焦光线

同一种
几何形状

稳定膜结构

抵抗紫外损伤

物理定律的必然选择

10亿年前

100万年前

7亿年前

1万年前

细胞膜的
双层结构
维持边界稳定

螺旋状叶绿体
减少光损伤
抵抗紫外线

原生界·变形虫

植物界·绿藻水绵

5亿年前

100万年前

不同的基因
相同的几何
相同的物理定律
相同的结论

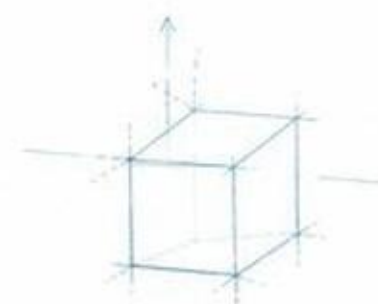
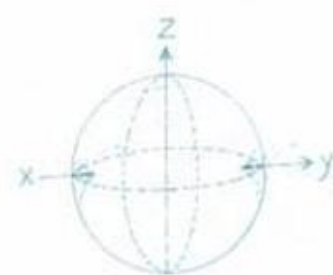
基因可以变化
几何不易变化
因为它是
物理定律的解

最优几何 = 最小能量
最大效率 = 稳定

1亿年前



请闭上眼睛，花三秒钟体会...



最大表面积增加

应力完全均匀

能量代价最小

✧ 这就是所谓造物主偏好的本质 ✧

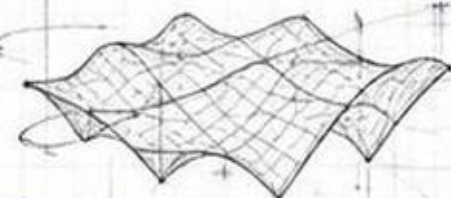
物理定律的宏观结构

从微观到宏观的约束与涌现

三维空间

几何约束

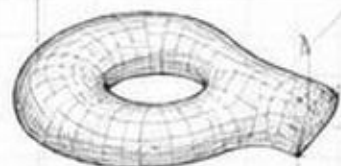
- 最小曲面原理
- 平均曲率 $H=0$



$$\delta \int H^2 dA = 0$$

拓扑约束

- 连通性
- 欧拉示性数 χ



$$\chi = V - E + F$$

曲率能量

$$E_b = \int \kappa (2H^2 - 2K) dA$$

最小化曲率能量
→ 自发形成稳定结构

膜的存在

$$\nabla \cdot n = 2H$$

$$\Delta_s H + 2H(H^2 - K) = 0$$

质量守恒

物质不凭空产生

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$$

动量守恒

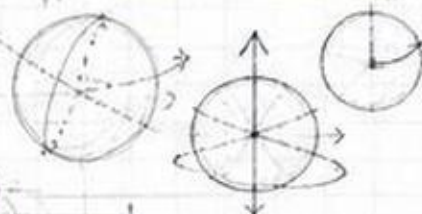
作用力与反作用力

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma + f$$

对称性原理

对称性 → 守恒量
Noether 定理

$$\delta S = 0 \rightarrow \text{守恒量}$$



能量守恒定律

能量表达式

$$E = \int \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + u \right) dV$$

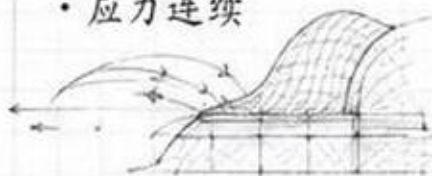
最小作用量原理

自然选择的路径

$$\delta S = \delta \int L dt = 0$$

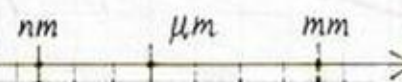
边界与连续性

- 无穿透边界
- 应力连续



尺度分离

- 微观驱动
- 宏观涌现



无需被编码在基因里

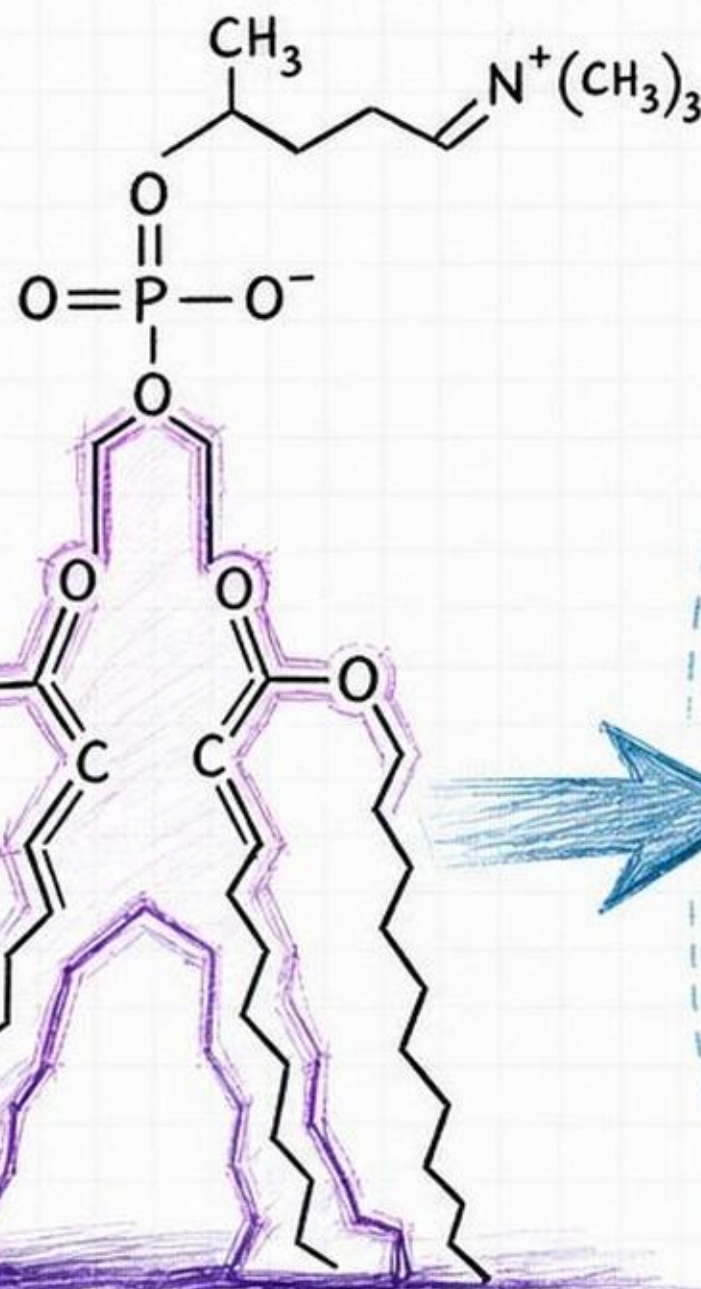
物理定律本身的结构限制

决定了可能的形态, 驱动了必然的涌现

缩醛磷脂：分子卫兵

自由基
攻击

乙烯基醚键
(牺牲自身,
优先吸收自由基攻击)

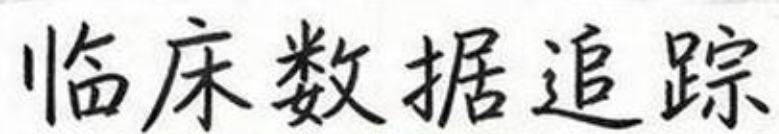


受保护的
细胞膜

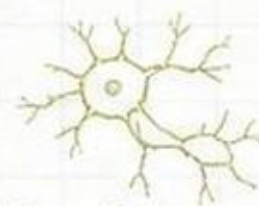
缩醛磷脂 (Plasmalogen)
通过乙烯基醚键的“牺牲”，
优先捕获自由基，保护不饱和脂肪酸，
维持细胞膜的稳定与功能。

替队友挡子弹的微观卫兵

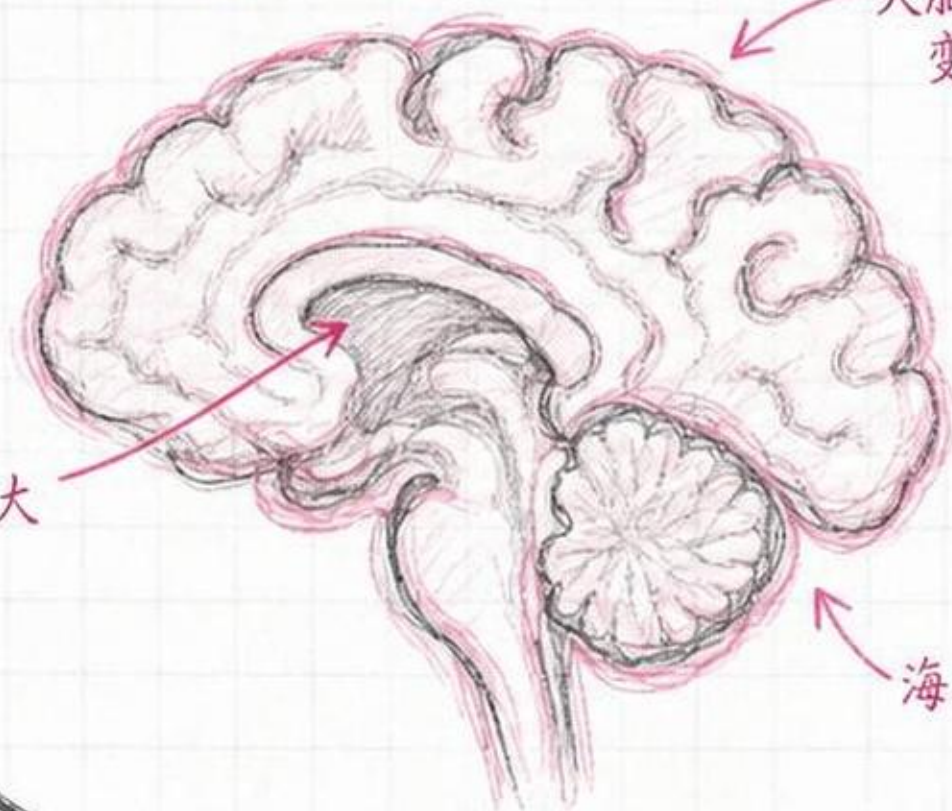
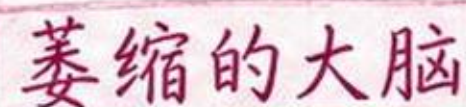
- 乙烯基醚键 (牺牲位点)
- 分子骨架 (卫兵主体)
- 自由基攻击
- 细胞膜与保护区域



阿尔茨海默症 (Alzheimer's)



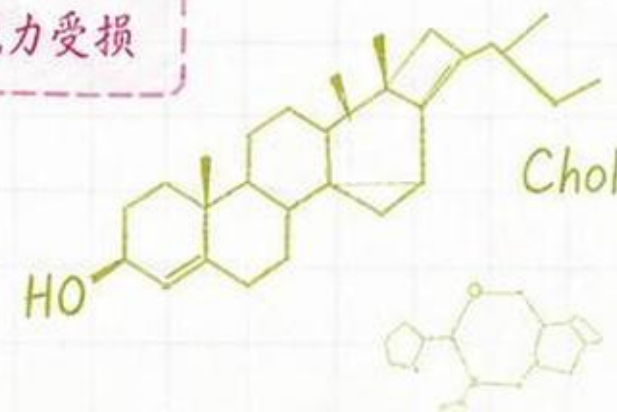
神经元丢失
突触减少



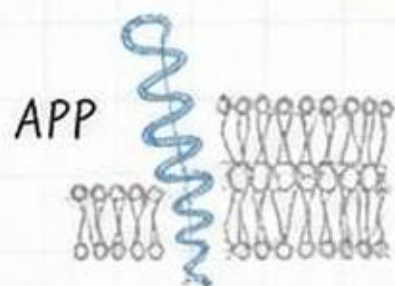
大脑皮层
变薄

一、海马体萎缩

- 记忆力下降
- 认知功能减退
- 日常生活能力受损



衰老进程



伽马分泌酶
(失控状态)

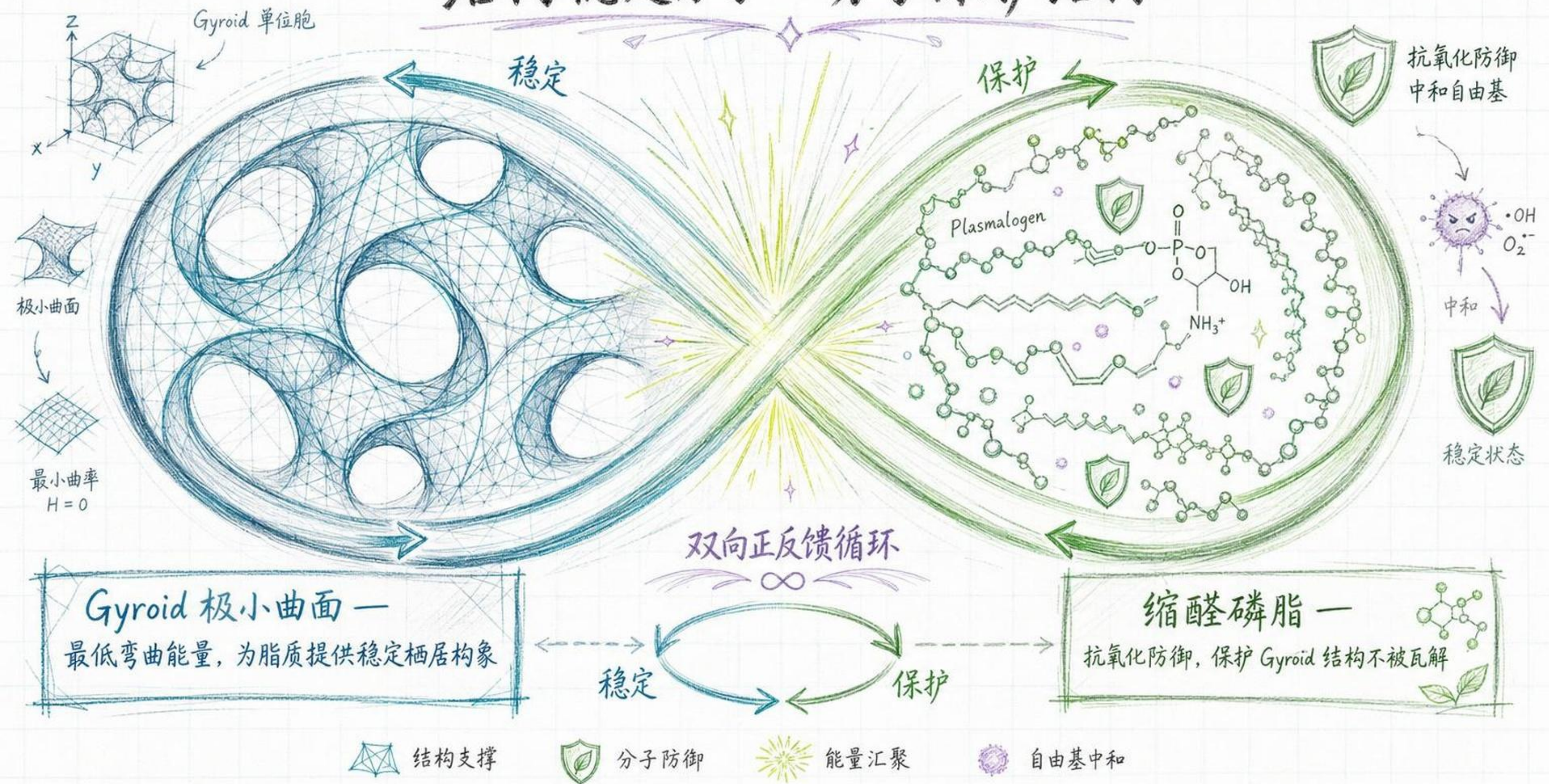
$A\beta$ 片段

沉积 /
神经毒性



缩醛磷脂↓
伽马分泌酶↑
风险↑

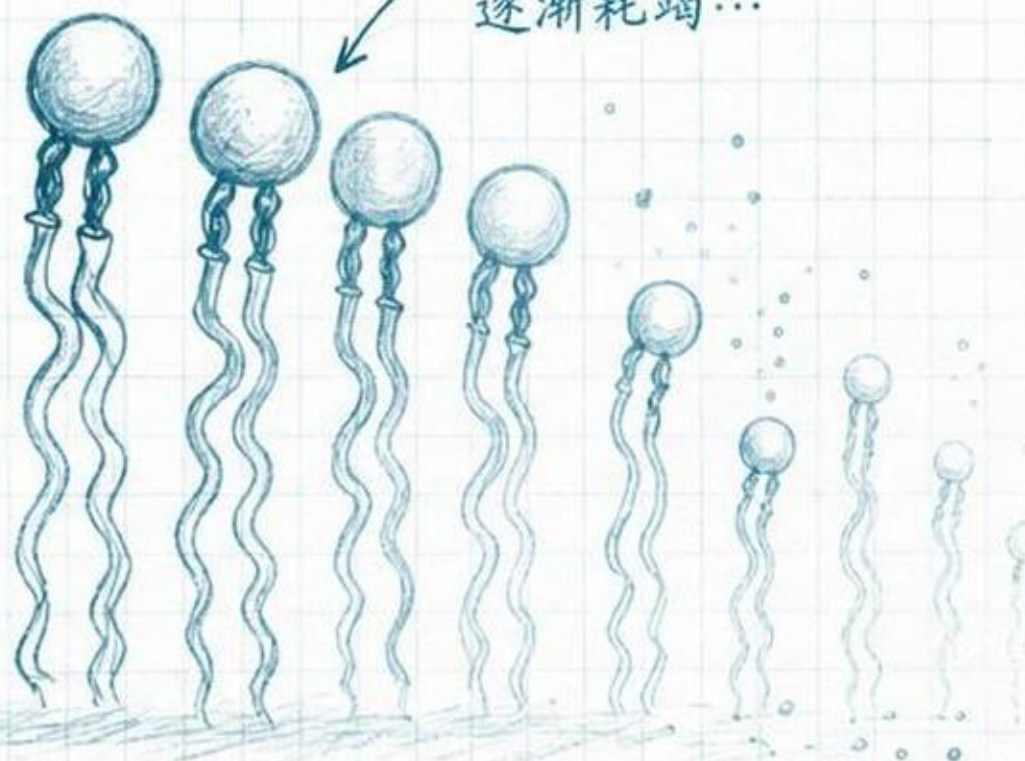
结构稳定分子 · 分子保护结构



当循环被打破

阶段1：防线崩溃

质敌卫士 (plasmalogen)
逐渐耗竭...



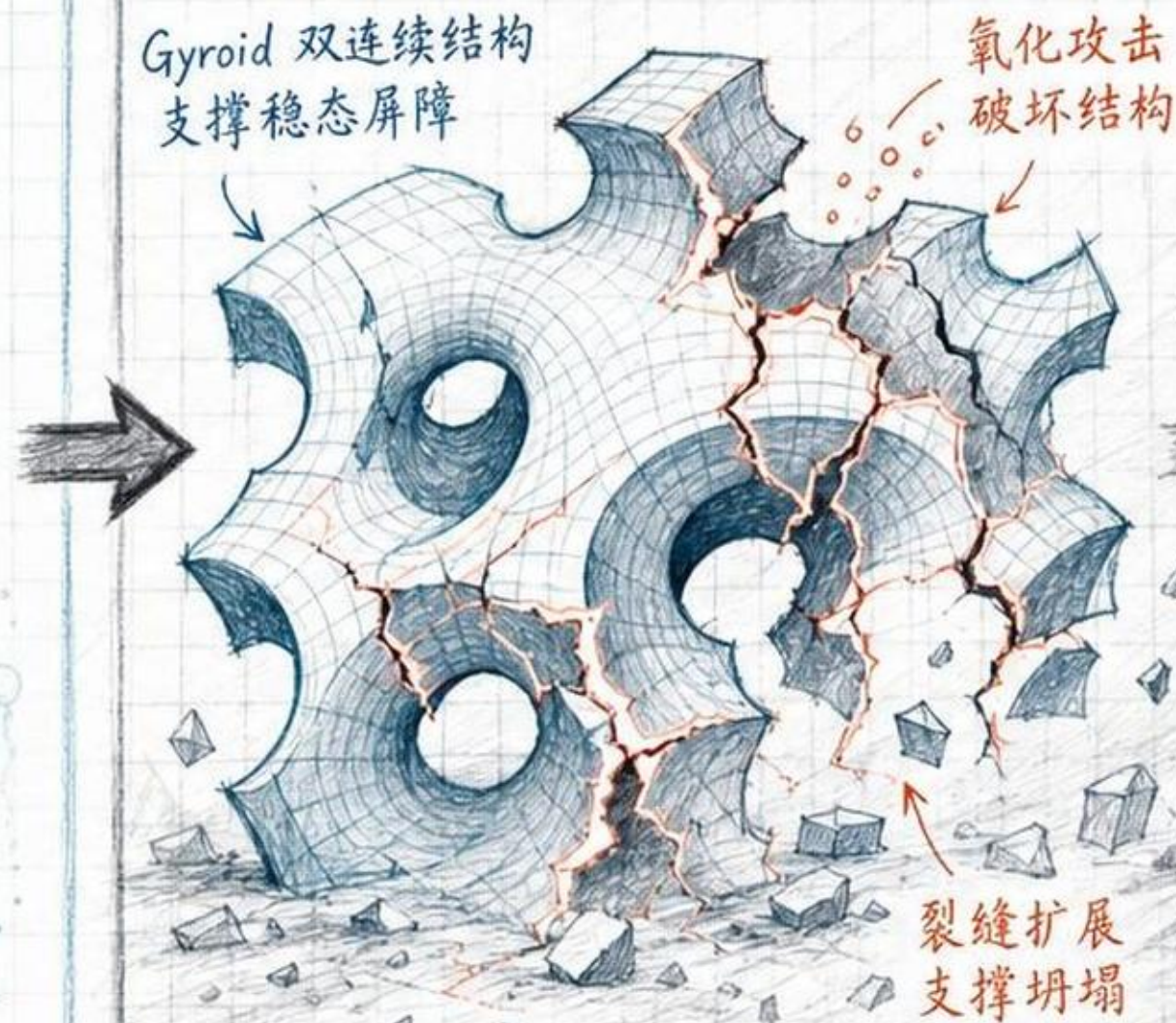
充足 ———— 减少 ———— 稀缺

防御减弱
循环失衡

阶段2：结构裂缝

Gyroid 双连续结构
支撑稳态屏障

氧化攻击
破坏结构



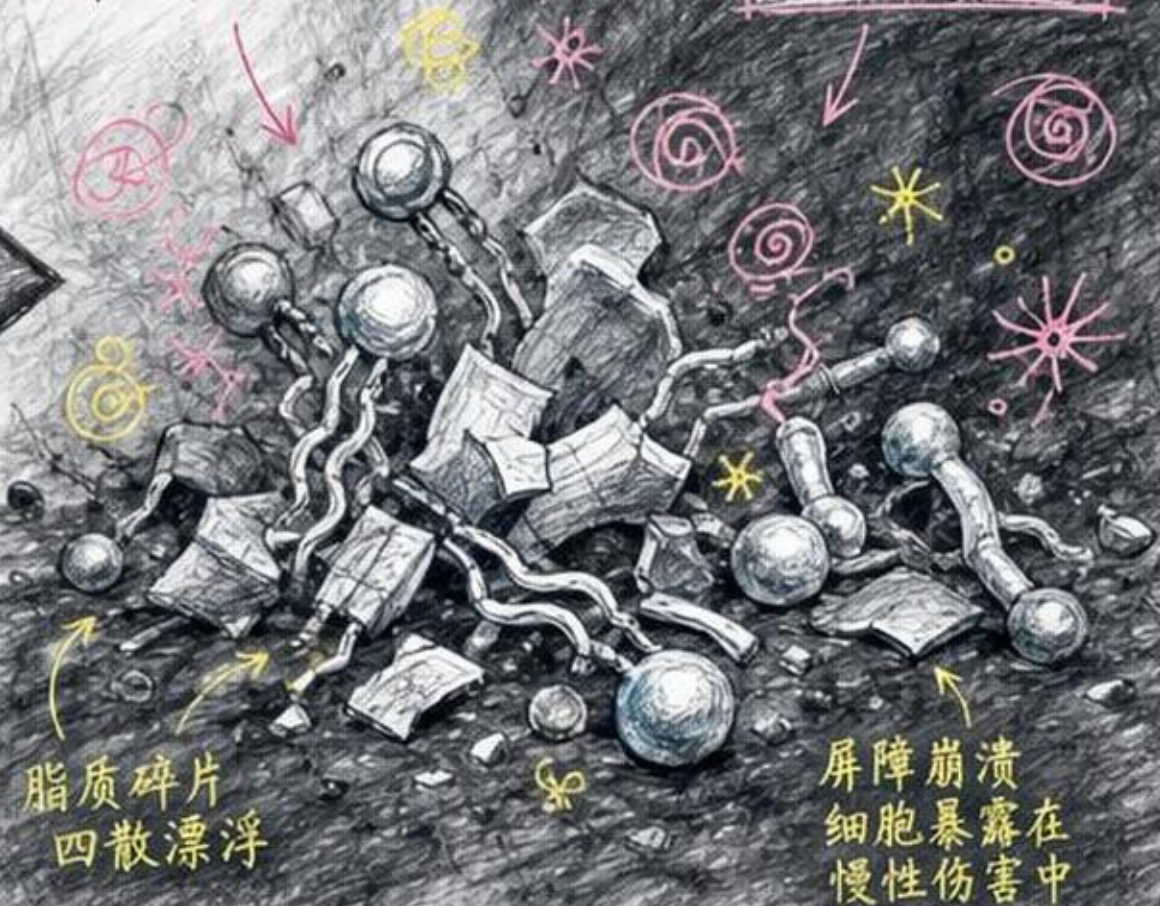
裂缝扩展
支撑坍塌

结构受损
功能衰退

阶段3：死亡螺旋

自由基风暴
持续氧化

几何坍塌，
无法逆转



脂质碎片
四散漂浮

屏障崩溃
细胞暴露在
慢性伤害中

失控循环
走向衰亡

防线崩溃

结构裂缝

死亡螺旋

不可逆的衰退

几何容器完好

化学秩序正常

稳定边界

膜结构完整
边界清晰

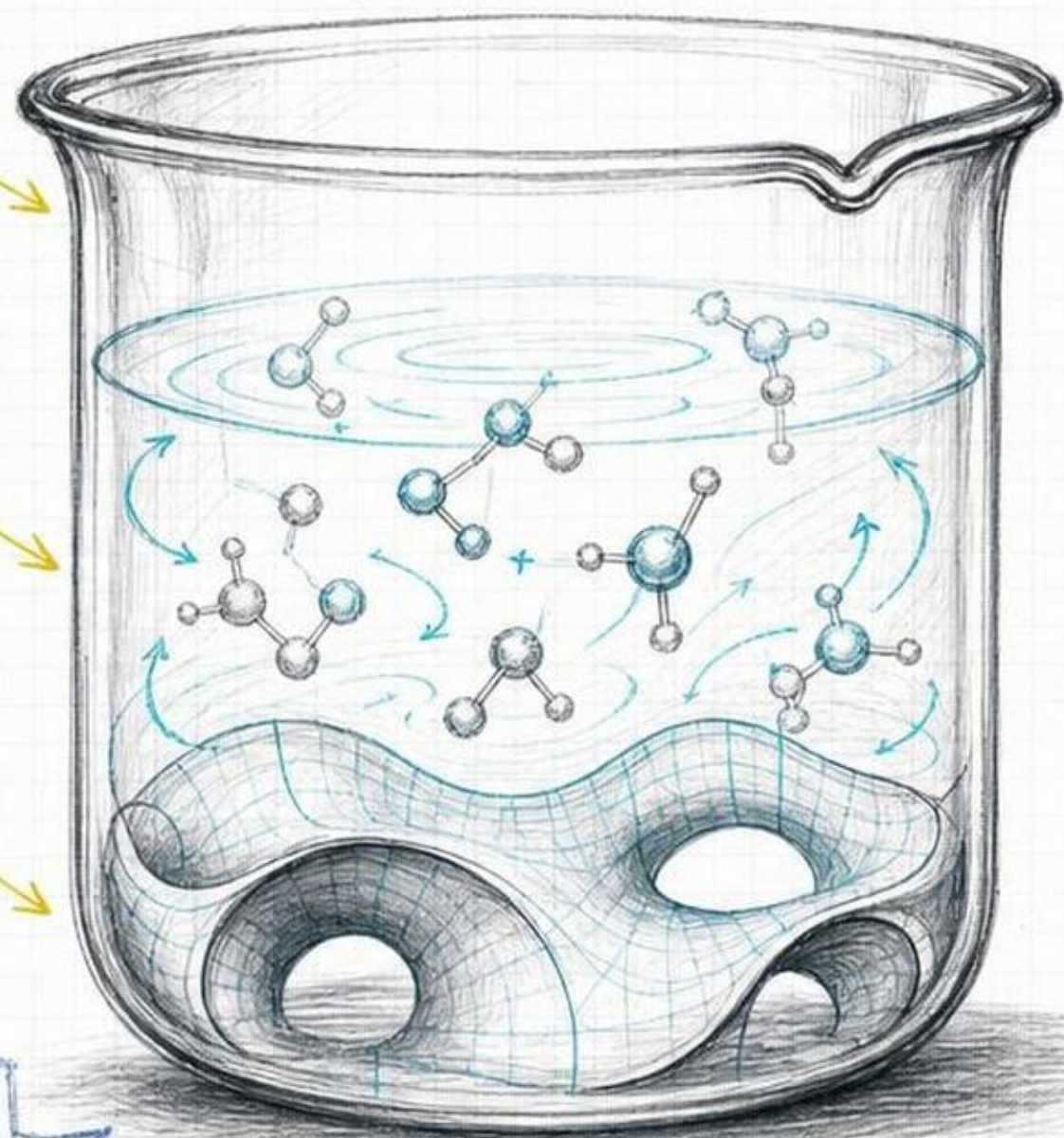
有序化学环境

分子扩散有序
信号传递顺畅

极小曲面结构

Gyroid 拓扑
稳定支撑膜系统

低熵·低噪声
高效·协同



衰老的本质

几何容器退化崩溃

神经化学连锁错误

边界破裂

膜结构受损
通透性异常

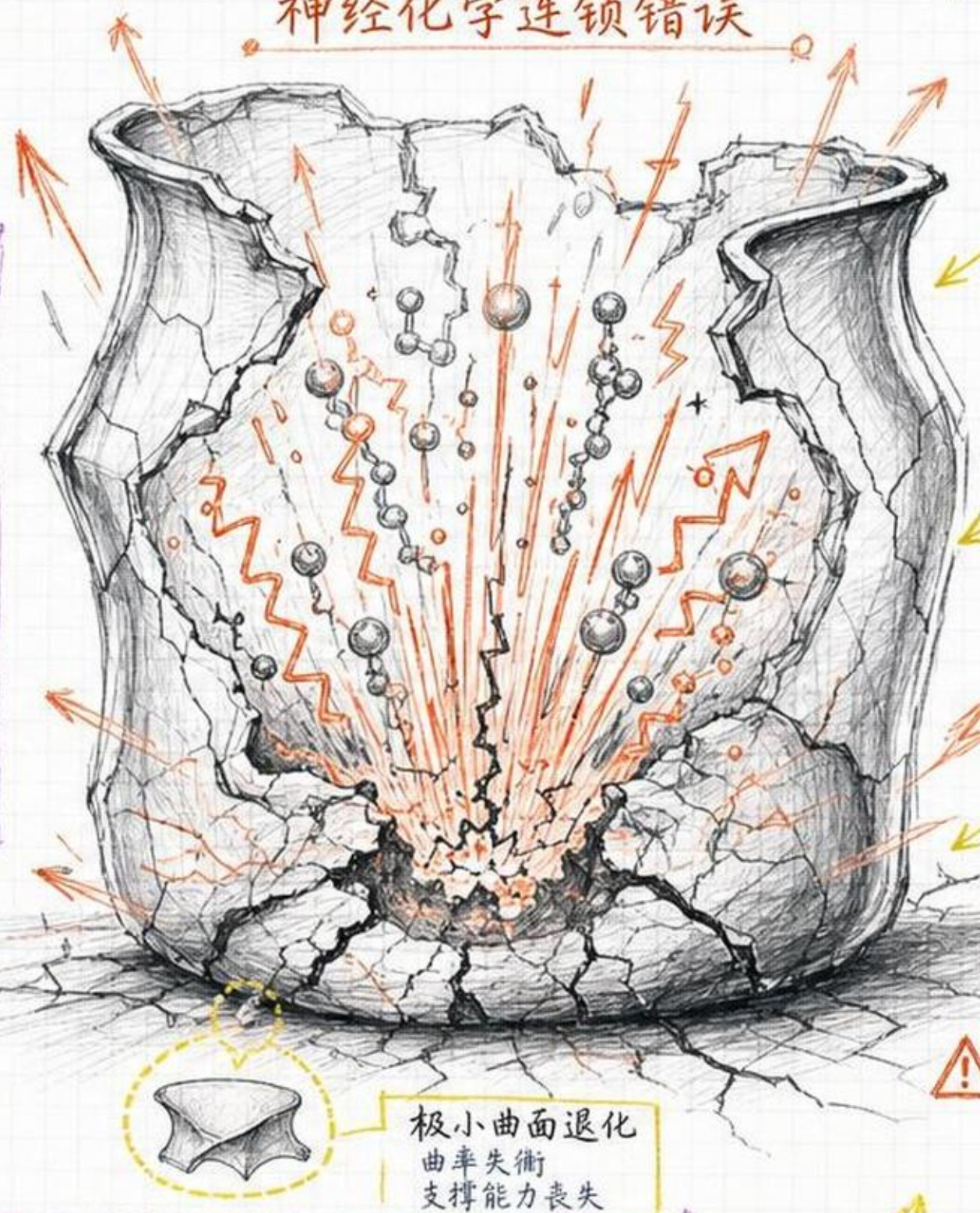
化学连锁错误

信号过度放大
自由基失控

支撑结构崩塌

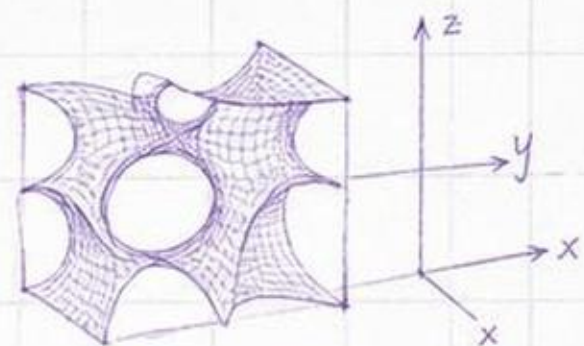
拓扑破坏
微环境失稳

高噪声·高熵
失控·失协同



极小曲面退化
曲率失衡
支撑能力丧失

形态先崩溃 → 化学再跟着乱



Gyroid 极小曲面

- 零平均曲率 ($H=0$)
- 空间分隔最优化
- 自然的周期性秩序



结构色的来源:
多层膜的干涉
基于极小曲面



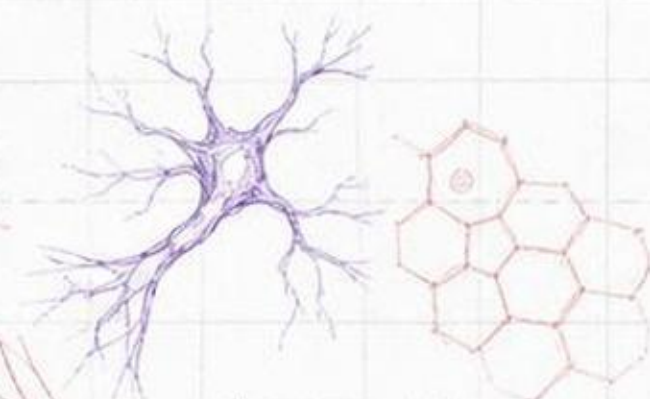
生物界的膜基

距离只在一张极小曲面的厚度间

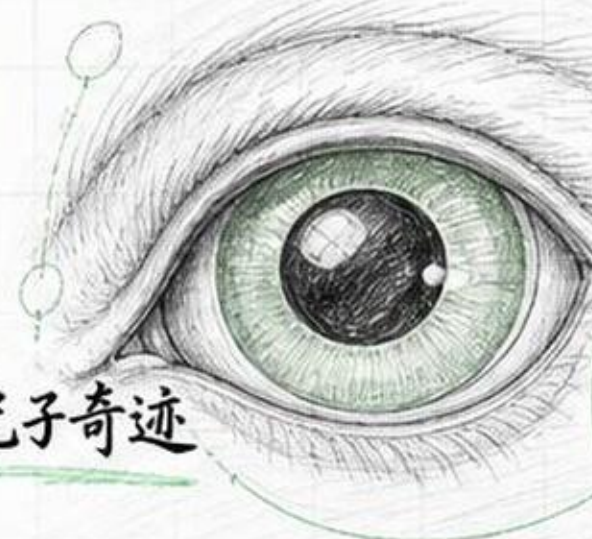
光子奇迹

阿尔茨海默症大脑防线

神经元脆弱如膜
防线薄如蝉翼



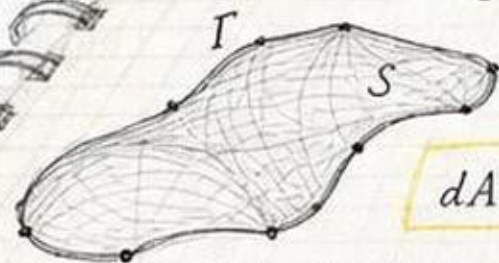
神经网络拓扑
信息流动的迷宫



树跑眼的多层膜

- 天然光子晶膜
- 基于极小曲面实现隐形与色敏

问题: 寻找面积最小的曲面
给定边界 Γ



$$A[S] = \iint_S dA$$

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u, F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v, G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$$

$$\delta A = 0$$

$$\delta \iint_S \sqrt{EG - F^2} du dv = 0$$

$$\Rightarrow \iint_S \delta(\sqrt{EG - F^2}) du dv = 0$$

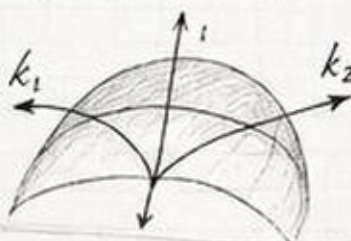
$$\Rightarrow H = 0$$

平均曲率为零
极小曲面

1970年, 极小曲面的纸笔推导

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

k_1, k_2 : 主曲率



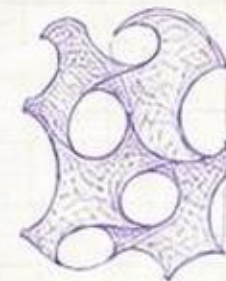
典型极小曲面



Helicoid
螺旋面



Catenoid
悬链面



Gyroid
双周期面



双周期性
 T_1, T_2, T_3

极小曲面截面



三重线 (120°)
自然界的
稳定结构

数学家的笔尖

蝴蝶的翅膀

坍塌的大脑

今天最核心的问题

生命是后来的适应者

宇宙先存，生命被迫顺应

宇宙先于生命
冷漠，巨寂，无目的

物理定律
无情地运行

生命偶然出现
脆弱，微小，短暂

适应与挣扎
在夹缝中求生存

生存不是答案
只是被迫的结果

在沉默的宇宙中
寻找一线生机

数学是生命的先决条件

公式先悬，生命自然盛开

数学的结构之美
简洁，优雅，必然

$$\int_M K dA = 2\pi \chi(M) \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$$

$$S = \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x$$
$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

最小曲面方程

$$H = 0$$

$$\Delta_g f + |A|^2 f = 0$$

$$e^{2\pi} + 1 = 0$$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{r}} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

数学不是工具，
而是存在的
语言

黎曼曲率
 R_{ijkl}

公式先于物质
逻辑在本质之先

几何孕育可能
结构决定形态

生命自然涌现
如花绽放，生生不息

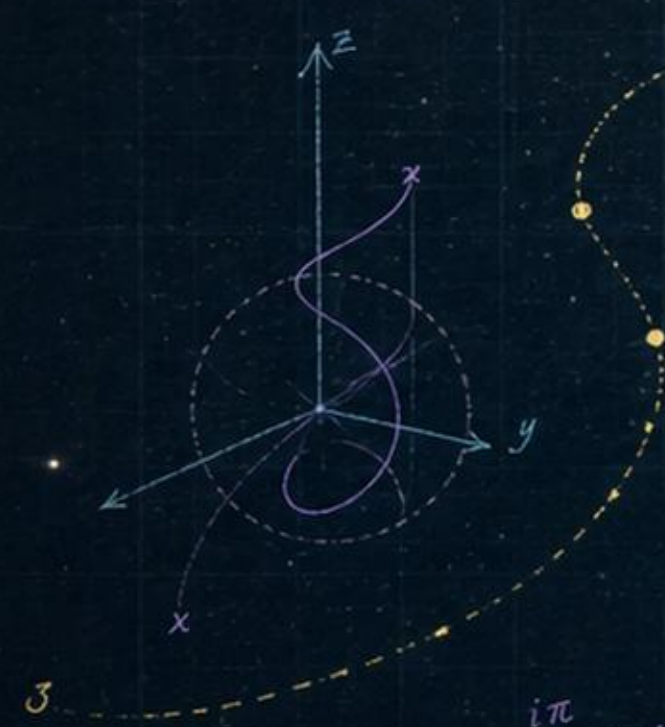
存在本身
是数学的诗篇

我们究竟是
宇宙的意外，
还是数学的
必然？

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

数学是宇宙的语言？



$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$\int_M K dA = 2\pi \chi(M)$$

结构先于存在？

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

你倾向于哪一种答案？

生命是被动适应，还是被数学预定？



我是王利杰，期待你的想法，下期见。❤